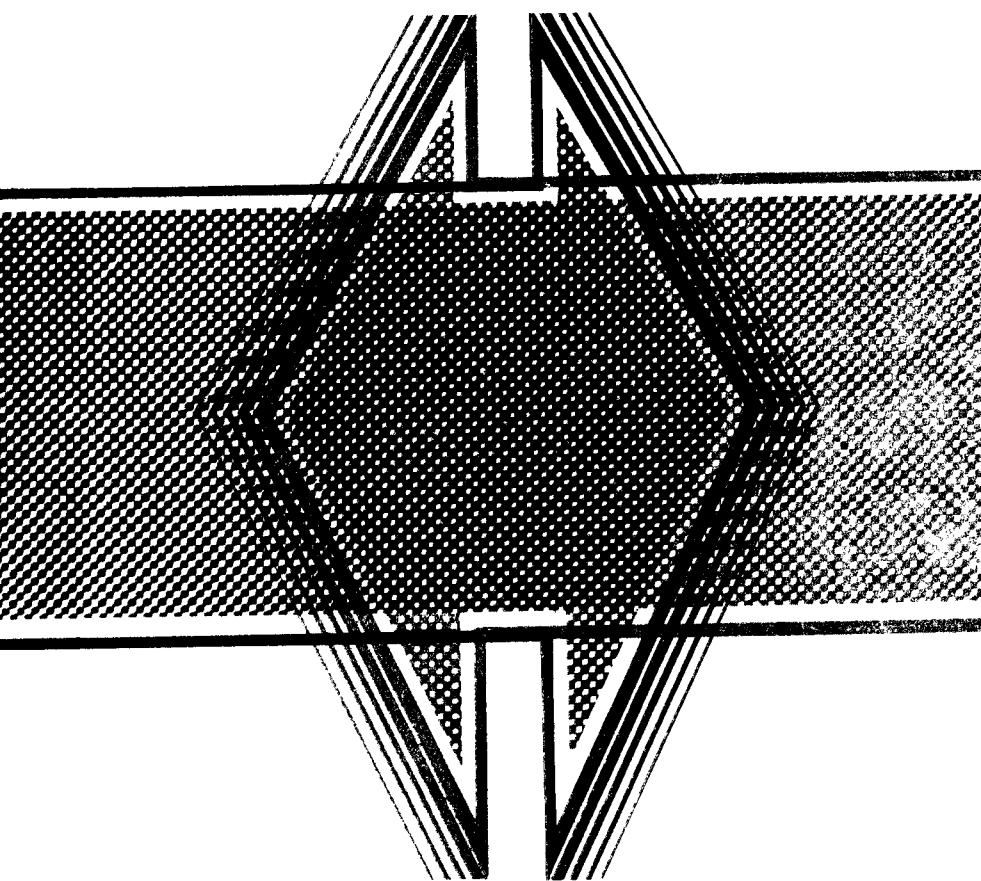


А.А. Потапкин

**ПРОЕКТИРОВАНИЕ  
СТАЛЬНЫХ МОСТОВ  
С УЧЕТОМ ПЛАСТИЧЕСКИХ  
ДЕФОРМАЦИЙ**



ИЗДАТЕЛЬСТВО • ТРАНСПОРТ •

**Потапкин А. А.** Проектирование стальных мостов с учетом пластических деформаций. — М.: Транспорт, 1984. — 200 с.

Рассмотрены принципы проектирования стальных мостов с учетом пространственной работы и пластических деформаций. Предложены критерии предельных состояний, методы расчета на прочность и устойчивость в упругопластической стадии. Показаны особенности проектирования конструкций автодорожных, железнодорожных и совмещенных мостов.

Предназначена для инженеров проектировщиков искусственных сооружений, а также научных работников.

Ил. 70, табл. 8, библиогр. 88 назв.

Рецензент П. И. Френкель

Заведующий редакцией В. Г. Чванов

Редактор Е. С. Голубкова

Рекомендовано к изданию Государственным ордена Трудового Красного Знамени проектно-исследовательским институтом по проектированию и изысканиям больших мостов «Гипротрансмост».

*Анатолий Алексеевич Потапкин*

## ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТАЛЬНЫХ МОСТОВ С УЧЕТОМ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

Обложка художника *Г. П. Казаковцева*  
Технический редактор *Т. А. Захарова*  
Корректор-вычитчик *В. Я. Кинареевская*  
Корректор *М. Ю. Ляхович*

ИБ № 2725

---

Сдано в набор 14.06.83. Подписано в печать 19.03.84. Т-07186.

Формат 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бум. тип. № 1. Гарнитура литературная. Высокая печать.  
Усл. печ. л. 12,5. Усл. кр.-отг. 13,01. Уч.-изд. л. 13,97. Тираж 3100 экз. Заказ 1673

Цена 75 коп. Изд. № 1-3-1/15 № 2081

Ордена «Знак Почета» издательство «ТРАНСПОРТ»,  
107174, Москва, Басманный туп., 6а

---

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома  
при Государственном комитете СССР  
по делам издательств, полиграфии и книжной торговле  
129041, Москва, Б. Переяславская ул., д. 46

П 3601020000-114  
049(01)-84 7 81

© Издательство «Транспорт», 1984

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Повышение эффективности всех отраслей народного хозяйства—первостепенная задача, непосредственно вытекающая из решений XXVI съезда КПСС.

Рост объемов мостостроения и расширение транспортного строительства в различных районах страны требуют создания экономичных мостовых конструкций, что может быть достигнуто как повышением эффективности использования материалов, так и применением прогрессивных конструктивных решений. Большое значение здесь имеют методы расчета и принципы проектирования, базирующиеся на новейших теоретических исследованиях в этой области.

В предлагаемой читателю книге затрагивается ряд важных вопросов, связанных с учетом пластических свойств стали и пространственной работой сооружения. Пластичность — фундаментальное свойство стали как конструкционного материала. Пластическими характеристиками определяется работоспособность стали в тех или иных условиях, возможность более полного использования ее прочностных свойств. Учет пластических свойств при проектировании стальных мостов требует специального подхода к выбору марки стали и расчету пролетных строений. В книге систематизированно изложен этот вопрос, рассмотрены механика разрушения стальных элементов, методы деформационной теории пластичности и расчетов на прочность и устойчивость при ограниченных пластических деформациях, особенности расчета и проектирования пространственных конструкций мостов.

Первые главы посвящены теоретическим и физическим особенностям современных методов расчета и проектирования стальных мостов; рассмотрены энергетические методы расчета и механика разрушения стальных конструкций, учет пластических деформаций и пространственной работы мостов, а также применение деформационной теории пластичности в расчетах сооружений и развитие метода упругих решений А. А. Ильюшина в форме комбинированного метода. Эти материалы составляют теоретическую базу для разработки прикладных принципов расчета и проектирования стальных мостов.

Уточнение критериев предельного состояния мостовых конструкций имеет большое практическое значение. СТ СЭВ 384-76 «Основные положения по расчету» устанавливает виды критериев без указания их качественных и количественных характеристик.

Учитывая это, в гл. 4 даны деформационные критерии эксплуатационной способности стальных пролетных строений с охватом трех уровней — системы в целом, отдельных элементов и сечения. В пятой главе приведены методы расчета пролетных строений с учетом ограниченных пластических деформаций, позволяющие повысить эффективность использования несущей способности стали в пролетных строениях.

Важнейшее значение при проектировании стальных конструкций имеет обеспечение устойчивости как отдельных пластин, так и целых стержней (балок). Данному вопросу посвящена гл. 6, в которой изложены наиболее сложные случаи устойчивости пластин и стержней в упругопластической стадии, показана связь прочности и устойчивости стальных конструкций при учете в расчетах пластических деформаций. Разработанные и изложенные в книге соответствующие методы расчета составляют один из принципов проектирования стальных конструкций — принцип устойчивой прочности в упругопластической стадии. В гл. 7 рассмотрены также особенности расчета и конструирования стальных пролетных строений автодорожных и железнодорожных мостов с использованием разработок автора при проектировании значительного числа стальных мостов.

Теоретические исследования позволили установить некоторые важные принципы проектирования, реализация которых дает возможность на новой качественной основе подойти к созданию прогрессивных конструктивных решений.

Автор выражает благодарность инж. П. И. Френкелю, давшему ряд полезных предложений при подготовке книги к опубликованию.

Замечания и пожелания по затронутым в книге вопросам просьба направлять по адресу: Москва, 107174, Басманный тупик, ба, издательство «Транспорт».

*Автор*



# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ФИЗИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ МЕТОДОВ ПРОЕКТИРОВАНИЯ МОСТОВ

## 1.1. ПУТИ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ МЕТОДОВ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Проектирование сооружений — расчет и конструирование их — выполняется как на нормативной базе, так и на соответствующей теории. Нормативная база содержит качественные и количественные критерии предельных состояний, устанавливаемые в зависимости от функционального назначения конструкции и опыта ее эксплуатации. Теоретические основы методов проектирования позволяют сформулировать соответствующие критерии на основе строительной механики и раскрыть поведение системы при различных нагрузках и воздействиях. Конструирование узлов и элементов пролетных строений существенным образом опирается на методы расчета. Нормативные критерии предназначены обеспечивать рациональность и надежность конструкций в эксплуатации.

При пользовании приближенными методами расчета их неточности компенсируются общим коэффициентом запаса при назначении допускаемых напряжений, обеспечивающим, как правило, вполне надежные, но часто недостаточно экономичные сооружения.

Разработанные новые методы расчета позволяют уточнить размер и характер распределения напряжений. Однако если при этом считать неизменным расчетное сопротивление (допускаемое напряжение), то результатом тоже будет неоправданное утяжеление конструкции, что следует из рассмотрения основного неравенства расчета на прочность. Сечение, например, растянутого элемента фермы, при использовании метода допускаемых напряжений подбирали исходя из основного неравенства

$$\sigma = N_H / F \leq [\sigma],$$

где  $N_H$  — усилие в элементе;  $F$  — его площадь сечения;  $[\sigma]$  — допускаемое напряжение на растяжение.

Усилие  $N_H$  в элементе определяли по нормативной нагрузке, без учета возможной перегрузки в шарнирной схеме, а моменты и напряжения от жесткости узлов в большинстве случаев не учитывались. Надежность и прочность конструкции обеспечивали, назначая допускаемое напряжение значительно ниже предела текучести.

Тот же расчет по предельным состояниям и упрощенной расчетной схемы базируется на основном неравенстве:

$$\sigma = N_p / F < R = (\sigma_T)_{\min},$$

где  $N_p$  — усилие в элементе от расчетной нагрузки с учетом возможной перегрузки;  $R$  — расчетное сопротивление;  $(\sigma_T)_{\min}$  — возможное (с заданной вероятностью) минимальное значение предела текучести.

Здесь логично вслед за уточнением воздействия заменой  $N_{\text{н}}$  на  $N_{\text{р}}$  последовало уточнение сопротивления — замена  $[\sigma]$  на  $R$ . При этом не только не произошло неоправданного утяжеления конструкции, но наоборот, появилась возможность ее облегчить и повысить равнопрочность за счет дифференцированного учета перегрузки для каждого из элементов.

С переходом от упрощенных расчетных схем к уточненным и пространственным расчетам тоже должны претерпеть изменение обе части основного неравенства, которое в этом случае упрощенно можно записать так:

$$\sigma = f(N_{\text{р}}, M_{\text{р}}, W) \leq R_{\text{пр}},$$

где  $M$  — изгибающий момент в элементе от расчетной нагрузки;  $W$  — момент сопротивления сечения элемента;  $R_{\text{пр}}$  — расчетное сопротивление для элемента, подверженного сложному воздействию сил.

Очевидно, что повышением значения  $R$  до  $R_{\text{пр}}$  учитывается ограниченное развитие пластических деформаций при упрощенных расчетных схемах.

Прогрессивность нового подхода определяется возможностью дифференцированного учета сложного напряженного состояния каждого элемента конструкции за счет использования уточненного пространственного расчета и дифференцированного назначения  $R_{\text{пр}}$  с учетом особенностей материала и формы сечения каждого из элементов. Таким образом, дальнейшая разработка новых методов расчета должна сопровождаться уточнением критериев предельного состояния, и следовательно, должна изменяться как левая, так и правая часть основного уравнения проверки несущей способности.

Современное состояние метода предельных состояний отражено в главе СНиП II-A. 10-71 «Основные положения проектирования» и стандарте ЭВ 384-76 «Основные положения по расчету». Вместо трех прежних введены две группы предельных состояний: группа I — по потере несущей способности или полной непригодности к эксплуатации (в проекте СНиП II-43 «Мосты и трубы» эта группа разделена на две подгруппы IA и IB); группа II — по непригодности к нормальной эксплуатации. Естественно, что эти нормативные документы не устанавливают качественных и количественных критериев предельных состояний по типам сооружений, но в общей форме их содержат. При этом расчет имеет целью не допускать наступления предельных состояний в течение всего срока службы сооружения.

В нормах на проектирование мостов СН 2000-62 отсутствуют четкие качественные и количественные критерии предельных состояний по прочности, что служит их определенным недостатком. Кроме того, эти нормы не содержат положений для проектирования новых типов пролетных строений, например коробчатых.

Критерии предельных состояний целесообразно формулировать на основе строительной механики и они должны удовлетворять следующим требованиям: 1) характеризовать эксплуатационные каче-

на сооружения; 2) учитывать степень повреждаемости материала конструкции и отражать ее несущую способность; 3) способствовать получению конструкций с минимальным расходом материала. Кроме того, критерии необходимо базировать на определенной теории прочности.

Феноменологические теории, например, классическая теория упругости, рассматривают бездефектный материал, и условия прочности (пластичности) имеют вид функциональной зависимости между напряжениями и деформациями. Предельное состояние при этом для идеально-пластичного материала отождествляется с развитием пластичности по всему объему тела.

В действительности конструкции имеют разного рода начальные дефекты как технологические, так и конструктивные, ограничивающие пластическую деформацию, при которой начинается разрушение. Таким образом, эти деформации не успевают распространиться на весь объем тела, что говорит в пользу критерия *ограниченной пластической деформации*. Для диаграммы с упрочнением такое ограничение служит естественным критерием. Несущую способность элемента (конструкции) при этом можно назвать конструктивной или эксплуатационной прочностью, верхней границей которой для бездефектного материала служит предельное равновесие, а нижней — хрупкая прочность при наличии соответствующих дефектов или условий. Следовательно, ограниченная пластическая деформация характеризует физическое состояние материала и отражает степень использования несущей (эксплуатационной) способности элемента или конструкции в целом.

Для практических исследований и расчетов конструкций целесообразно сочетание феноменологических теорий с физическими критериями, устанавливаемыми по тем или иным условиям — работоспособность материала, эксплуатационные требования. Этому и отвечают предлагаемые автором расчеты по ограниченным пластическим деформациям. С учетом изложенного и исходя из условий прочности приняты следующие *деформационные критерии* эксплуатационной способности: 1) интегральный для системы, в качестве которого принимается дополнительная энергия системы; 2) перемещения узлов и элементов конструкции; 3) физический для интенсивности ограниченной пластической деформации в сечении или точке элемента. Эти критерии характеризуют свойства сооружения как единого целого, так и отдельных его элементов и материала.

Таким образом, в качестве критерия предельного состояния группы I (из условий прочности) предлагается ограниченная пластическая деформация в сечениях элементов от расчетных нагрузок (местный критерий) или ограниченное общее остаточное перемещение конструкции (общий критерий), являющееся функцией местных пластических деформаций. Если местный критерий характеризует степень повреждаемости материала и степень использования несущей способности сечения, то общее остаточное перемещение характе-

ризует работу сооружения и невозможность его эксплуатации в предельном состоянии.

В качестве критерия предельного состояния группы II (из условий прочности) предлагается недопускать пластические деформации в сечениях элементов от нормативных нагрузок, т. е. обеспечивать упругую работу конструкции. Этот критерий характеризует работу сооружения с точки зрения затруднения нормальной эксплуатации под обращающимися или нормативными (максимальными для нормальной эксплуатации) нагрузками. В данном случае проверка по прочности совпадает по своему характеру с проверкой жесткости, а количественными нормативами будут расчетное сопротивление для прочности и допускаемое перемещение для жесткости.

В соответствии с рассмотренными критериями предельных состояний необходимы методы расчета как в упругой, так и в упруго-пластической стадиях, причем на первый план выдвигаются пространственные расчеты, как наиболее полно отражающие действительную работу конструкций. Это позволит дать предложения по нормированию расчетов, а также изучить особенности работы стальных пролетных строений, что, в свою очередь, пополнит рекомендации норм по конструированию.

Установление численных нормативов и уточнение расчетных схем невозможно без анализа результатов экспериментальных исследований самого материала (стали) и испытаний конструкций стальных мостов. Все отмеченное в едином комплексе позволит перейти на новый качественный уровень методов расчета и конструирования стальных мостов, что приведет к созданию более экономичных, равнопрочных, совершенных и надежных сооружений, а следовательно, в известной степени решится важнейшая проблема — проблема экономии стали.

## 1.2. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИИ

Энергетические методы и принципы имеют фундаментальное значение в теории сооружений и могут эффективно применяться к пространственным конструкциям различных типов [1, 3, 19, 69].

Рассмотрим принцип в о з м о ж н о й работы, который формулируется следующим образом. Если конструкция находится в равновесии и ей придается малое возможное (кинематически совместное) перемещение, то приращение  $\delta W$  возможной работы внешних сил равно приращению  $\delta U$  возможной работы внутренних сил. Для приращения возможной работы внешних сил имеет место зависимость (действительные силы совершают работу на возможных перемещениях)

$$\delta W = \int_V [\Gamma_x \delta u + \Gamma_y \delta v + \Gamma_z \delta w] dV + \int_S [F_x \delta u + F_y \delta v + F_z \delta w] dS, \quad (1.1)$$

где  $\Gamma_i$  — объемные силы;  $u, v, w$  — составляющие перемещений;  $F_i$  — поверхностные силы.

В случае внешних сосредоточенных сил, приращение возможной работы

$$\delta W = \sum_i P_i \delta \Delta_i,$$

где  $P_i, \Delta_i$  — обобщенные силы и перемещения.

Для приращения возможной работы внутренних сил справедлива зависимость

$$\delta U = \int_V [\sigma_x \delta \epsilon_x + \dots + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \dots] dV. \quad (1.2)$$

В случае стержневой системы выражение (1.2) записывается следующим образом:

$$\delta U = \sum_k \int_{l_k} [M_y \delta \kappa_y + M_z \delta \kappa_z + M_x \delta \vartheta + Q_y \delta \gamma_y + Q_z \delta \gamma_z + N \delta \epsilon_x] dx,$$

где  $\delta \kappa, \delta \vartheta, \delta \gamma, \delta \epsilon$  — соответственно деформации изгиба, кручения, сдвига, растяжения (сжатия).

Используя принцип возможной работы, определим реакцию  $r$  по направлению  $i$ , если заданы действительные напряжения  $\sigma, \tau$  в конструкции, уравнивающие силу  $r_i$ . В общем случае конструкция может быть физически нелинейна. Варьируя перемещением  $u_i$  и принимая за действительную силу  $r_i$ , будем иметь

$$r_i \delta u_i = \int_V [\sigma_x \delta \epsilon_x + \dots + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \dots] dV.$$

Полагая  $\delta u_i = 1$ , получим формулу метода единичного перемещения для определения реакций:

$$r_i \cdot 1 = \int_V [\sigma_x \bar{\epsilon}_x + \dots + \tau_{xy} \bar{\gamma}_{xy} + \dots] dV, \quad (1.3)$$

где  $\bar{\epsilon}_x, \dots, \bar{\gamma}_{xy}, \dots$  — деформации системы, вызванные единичным перемещением в заданных точке и направлении.

Деформированное единичное состояние должно удовлетворять только кинематическим условиям совместности, т. е. должно рассматриваться в кинематически определенной системе.

Возьмем консольную балку пролетом  $l$  с заданной эпюрой моментов (действительное состояние) в виде уравнения  $M(x) = Px$ , где  $x$  — расстояние от свободного конца до произвольного сечения, и определим реакцию (силу) на конце консоли в вертикальном направлении. Деформированное единичное состояние создадим в балке, защемленной с двух сторон, т. е. дадим вертикальное единичное смещение одного конца. Кривизна балки в единичном состоянии

$$\bar{\kappa} = -6/l^2 + 2x/l^3.$$

Реакция по формуле (1.3)

$$r = \int_l M \bar{\kappa} dx = \int_0^l Px (-6/l^2 + 12x/l^3) dx = P.$$

При использовании понятия возможной работы варьировали перемещения и рассматривали работу действительных сил на приращениях перемещений. Наряду с этим понятием, в расчетах нелинейных систем вводят понятие дополнительной возможной работы, когда варьировать силы. Соответственно под дополнительной работой понимают работу приращений сил на действительных перемещениях. Для действующих на конструкцию нагрузок приращение дополнительной работы:

$$\delta W^* = \int_V [u \delta \Gamma_x + v \delta \Gamma_y + w \delta \Gamma_z] dV + \int_S [u \delta F_x + v \delta F_y + w \delta F_z] dS. \quad (1.4)$$

В случае сосредоточенных нагрузок приращение возможной дополнительной работы

$$\delta W^* = \sum_j \Delta_j \delta P_j.$$

Приращение возможной дополнительной работы внутренних сил

$$\delta U^* = \int_V [\epsilon_x \delta \sigma_x + \dots + \gamma_{xy} \delta \tau_{xy} + \dots] dV. \quad (1.5)$$

Для стержневой системы соответственно

$$\delta U^* = \sum_i \int_S [\kappa_y \delta M_y + \kappa_z \delta M_z + \vartheta \delta M_x + \gamma_y \delta Q_y + \gamma_z \delta Q_z + \epsilon_x \delta N] dx.$$

Принцип возможной дополнительной работы для конструкции, находящейся в равновесии, записывается уравнением

$$\delta W^* = \delta U^*.$$

Используя данный принцип, определим перемещения  $u_i$  в теле, материал которого не следует закону Гука. Под действием внешних сил в теле возникли деформации  $\epsilon_x, \dots, \gamma_{xy}, \dots$ , которые считаем известными. Рассмотрим дополнительную систему нагрузок, точнее одну нагрузку  $P_i$ , приложенную в направлении искомого перемещения  $\Delta_i$ . Будем варьировать нагрузкой  $P_i$ , а за действительное перемещение примем  $\Delta_i$ . Тогда, используя условие  $\delta W^* = \delta U^*$ , получим

$$\delta P_i u_i = \int_V [\epsilon_x \delta \sigma_x + \dots + \gamma_{xy} \delta \tau_{xy} + \dots] dV,$$

где  $\delta \sigma_x, \dots, \delta \tau_{xy}, \dots$  — возможные малые изменения напряжений, вызванные действием  $\delta P_i$ .

Принимая  $\delta P_i = 1$ , можно написать формулу метода единичной нагрузки для определения перемещений

$$1 \cdot u_i = \int_V [\epsilon_x \bar{\sigma}_x + \dots + \gamma_{xy} \bar{\tau}_{xy} + \dots] dV, \quad (1.6)$$

где  $\bar{\sigma}_x, \dots, \bar{\tau}_{xy}, \dots$  — внутренние напряжения, вызванные единичной силой.

Эти напряжения должны удовлетворять только уравнениям равновесия, т. е. уравновешивать силу  $\delta P_i = 1$ . Поэтому их, т. е.  $\bar{\sigma}_x, \dots, \bar{\tau}_{xy}, \dots$ , целесообразно определять в простейшей статически определимой системе. Следует помнить, что деформации  $\varepsilon_x, \dots, \gamma_{xy}, \dots$  предварительно должны быть найдены в физически нелинейной, в общем случае статически неопределимой системе. Процедура вычисления перемещений по известным деформациям в основе своей чисто геометрическая и поэтому применима как для линейных, так и физически нелинейных задач.

Если материал следует закону Гука, то формула (1.6) для стержневых систем переходит в формулу Мора.

Найдем по методу единичной нагрузки прогиб свободного конца консоли длиной  $l$ , прямоугольного поперечного сечения с шириной  $b$  и высотой  $h$ ; сосредоточенная сила  $P$  приложена на конце консоли. Зависимость между напряжением и деформацией для материала — нелинейная  $\sigma = a\varepsilon^{1/2}$ , где  $a$  — коэффициент.

Сначала определим кривизну для любого сечения балки. Согласно гипотезе плоских сечений  $\chi = \varepsilon_{дв}/h$ , где  $\varepsilon_{дв}$  — удвоенная деформация верхнего волокна балки. Тогда выражение для изгибающего момента в произвольном поперечном сечении балки примет вид:

$$M = \frac{2bh^2}{\varepsilon_{дв}^2} \int_0^{\varepsilon_{дв}/2} \sigma \varepsilon d\varepsilon.$$

С учетом нелинейного закона деформирования материала, после интегрирования получим

$$M = abh^2 \varepsilon_{дв}^{1/2} / (5\sqrt{2}),$$

откуда

$$\varepsilon_{дв} = 50M^2 / (a^2 b^2 h^4).$$

В сечении, расположенном на расстоянии  $x$  от свободного конца консоли, кривизна

$$\chi = 50P^2 x^2 / (a^2 b^2 h^5).$$

Поскольку используем метод единичной нагрузки, необходимо иметь выражение изгибающего момента от единичной силы  $P = 1$ , т. е.  $M = 1 \cdot x$ . Используя формулу (1.6), получим перемещение

$$\Delta = \int_0^l (1) \cdot (x) \left( \frac{50P^2 x^2}{a^2 b^2 h^5} \right) dx = \frac{25P^2 l^4}{2a^2 b^2 h^5}.$$

Перейдем теперь к энергетическим методам расчета конструкций. Предварительно рассмотрим понятия энергии деформации и дополнительной энергии (энергии напряжения). Предположим, что имеем нелинейную зависимость между силой  $P$  и перемещением  $\Delta$  для растягиваемого стержня. Поскольку

для консервативной системы энергия  $U$  деформации равна работе  $W$  внешних сил, будем иметь

$$U = W = \int_0^{\Delta} P d\Delta. \quad (1.7)$$

Удельная энергия деформации  $u = \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon$ .

■ Когда материал следует закону Гука, для растягиваемого стержня можно записать выражения:

$$U = EF\Delta^2/(2l); u = 0,5E\varepsilon^2.$$

Энергия напряжения (дополнительная работа)

$$U^* = W^* = \int_0^P \Delta dP. \quad (1.8)$$

Удельная энергия напряжения  $u^* = \int_0^{\sigma} \varepsilon d\sigma$ . В частном случае, когда материал следует закону Гука, для растягиваемого стержня

$$U^* = P^2 l/(2EF); u^* = \sigma^2/(2E).$$

Для конструкций с линейным поведением энергия деформации равна энергии напряжения и эти величины представляются квадратичными формами от перемещений или от нагрузок.

Рассмотрим случай нелинейного поведения конструкции, для которой  $\Delta = aP^2$ , где  $a$  — коэффициент. Нелинейность может быть физической или геометрической. Для энергии деформации и энергии напряжений соответственно получим:

$$U = \int_0^{\Delta} \left(\frac{\Delta}{a}\right)^{1/2} d\Delta = \frac{2\Delta^{3/2}}{3a^{1/2}}; U^* = \int_0^P aP^2 dP = \frac{1}{3} aP^3.$$

Здесь энергия деформации выражается через перемещение, а энергия напряжения — через нагрузку. Однако в случае необходимости нет препятствий для выражения энергии деформации через нагрузку, а энергии напряжения через перемещение.

Используя понятия работы, дополнительной работы, а также определения энергии деформации и дополнительной энергии (энергии напряжения), перейдем к определению потенциальной энергии системы. Дадим определение: полная потенциальная энергия — это работа, которую совершают как внешние, так и внутренние силы системы при переводе ее из деформированного состояния в исходное, недеформированное. Для потенциальной энергии также имеет место двойственность ее представления. В соответствии с этим, можно записать: 1) полная потенциальная энергия деформации  $\Pi = U - W$ ; 2) полная потенциальная энергия напряжения или полная дополнительная энергия  $\Pi^* = U^* - W^*$ .

С использованием понятий потенциальной энергии связаны два фундаментальных принципа строительной механики — принципы



возможных изменений перемещений и принцип возможных изменений напряженного состояния.

Принцип возможных изменений перемещений формулируется следующим образом: если система находится в состоянии равновесия, то сумма возможных работ всех внешних и внутренних сил на всяком возможном бесконечно малом изменении перемещений равна нулю, т. е.  $\delta\Pi = 0$ . Состоянию устойчивого равновесия соответствуют условия:

$$\Pi = \min; \delta\Pi = 0, \delta^2\Pi > 0.$$

С этим принципом связана формула Лагранжа (1-я теорема Кастилиано)

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_i} = P_i, \quad (1.9)$$

т. е. частная производная от энергии деформации по обобщенному перемещению равна соответствующей ему обобщенной силе.

Рассматриваемый принцип применим для любых нагрузок, а также для физически и геометрически нелинейных задач. Из него вытекает метод перемещений строительной механики. При использовании принципа возможных изменений перемещений энергия деформации должна быть выражена через перемещения.

Принцип возможных изменений напряженного состояния (сил) формулируется следующим образом: если существует совместность деформаций системы, то сумма возможных работ, производимых возможными бесконечно малыми изменениями всех внешних и внутренних сил на действительных перемещениях системы, равна нулю, т. е.  $\delta\Pi^* = 0$ . Состоянию совместности деформаций соответствуют условия:

$$\Pi^* = \min; \delta\Pi^* = 0; \delta^2\Pi^* > 0.$$

С этим принципом связана формула Кротти-Энгессера:

$$\frac{\partial U^*}{\partial P_i} = \Delta_i, \quad (1.10)$$

т. е. частная производная от энергии напряжения по обобщенной силе равна соответствующему этой силе обобщенному перемещению. Данный принцип справедлив и для нелинейных задач; из него вытекает метод сил строительной техники. При использовании этого принципа энергия напряжения должна быть выражена через силы.

При линейном поведении конструкции формула (1.10) известна как вторая теорема Кастилиано.

Рассмотрим применение принципа возможных изменений перемещений для расчета конструкции (рис. 1.1, а), материал которой имеет нелинейную зависимость напряжения от деформации  $\sigma = b\varepsilon^{1/2}$ , где  $b$  — коэффициент.

Оба стержня (1 и 2) имеют одинаковую площадь  $F$  поперечного сечения. Рассчитаем нелинейно упругую ферму методом перемещений с привлечением формулы Лагранжа.

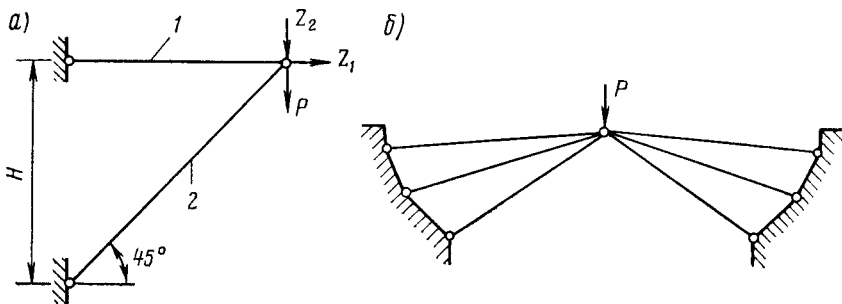


Рис. 1.1. Схемы к расчету по методу перемещений

Конструкция 2 раза кинематически неопределима, неизвестны перемещения узла  $Z_1$  и  $Z_2$ . Для решения задачи необходимо выразить энергию деформации через перемещения  $Z_1$  и  $Z_2$ .

Используя геометрические данные, вычисляем деформации стержней:

$$\text{удлинение} \quad \epsilon_1 = Z_1/H;$$

$$\text{укорочение} \quad (Z_2 - Z_1)/(2H).$$

Находим удельную энергию деформации стержней:

$$u_1 = \int_0^{\epsilon_1} \sigma d\epsilon = \int_0^{\epsilon_1} b\epsilon^{1/2} d\epsilon = \frac{2b}{3} \left( \frac{Z_1}{H} \right)^{3/2};$$

$$u_2 = \int_0^{\epsilon_2} \sigma d\epsilon = \int_0^{\epsilon_2} b\epsilon^{1/2} d\epsilon = \frac{2b}{3} \left( \frac{Z_2 - Z_1}{2H} \right)^{3/2}.$$

Полную энергию деформации системы получим, умножив соответствующие удельные энергии на объем каждого стержня:

$$U = \frac{Fb}{3H^{1/2}} [2Z_1^{3/2} + (Z_2 - Z_1)^{3/2}].$$

Таким образом энергия деформации выражена через неизвестные перемещения  $Z_1$  и  $Z_2$  в узле. В соответствии с первой теоремой Кастилиано вычислим частные производные от энергии деформации по перемещениям  $Z_1$  и  $Z_2$  и учтем при этом внешние силы в узле. Тогда получим:

$$P_1 = \frac{\partial U}{\partial Z_1} = \frac{Fb}{2H^{1/2}} [2Z_1^{1/2} - (Z_2 - Z_1)^{1/2}] = 0;$$

$$P_2 = \frac{\partial U}{\partial Z_2} = \frac{Fb}{2H^{1/2}} (Z_2 - Z_1)^{1/2} = P.$$

Эти уравнения свидетельствуют, что система находится в состоянии равновесия. После упрощения уравнений и их решения получаем выражения для искомых перемещений:

$$Z_1 = P^2 H / (F^2 b^2); \quad Z_2 = 5P^2 H / (F^2 b^2).$$

По полученным значениям перемещений вычисляем относительные деформации стержней:

$$\varepsilon_1 = \frac{Z_1}{H} = \frac{P^2}{F^2 b^2}; \quad \varepsilon_2 = \frac{Z_2 - Z_1}{2H} = \frac{2P^2}{F^2 b^2}.$$

Далее вычисляем напряжения в стержнях, учитывая при этом нелинейный закон деформирования:

$$\sigma_1 = b\varepsilon_1^{1/2} = P/F;$$

сжатие

$$\sigma_2 = b\varepsilon_2^{1/2} = \sqrt{2} P/F.$$

Усилия в стержнях конструкции:

$$N_1 = \sigma_1 F = P, \quad N_2 = \sigma_2 F = \sqrt{2} P.$$

В приведенном примере рассмотрена статически определимая система, однако ход решения, а также число неизвестных сохраняются и в случае статической неопределимости системы (см. например, рис. 1.1, б).

Проиллюстрируем применение принципа возможных изменений сил на расчете конструкции (рис 1.2, а), материал которой обладает физической нелинейностью  $\sigma = b\varepsilon^{1/2}$ . Найдем усилия в стержнях 1—3. В качестве лишнего неизвестного метода сил примем силу  $X$  в вертикальном стержне.

Находим усилия в стержнях основной системы:

$$N_1 = N_3 = (P - X) / \sqrt{2}; \quad N_2 = X.$$

Напряжения соответственно

$$\sigma_1 = \sigma_3 = (P - X) / \sqrt{2} F; \quad \sigma_2 = X/F,$$

где  $F$  — площадь поперечного сечения каждого из стержней.

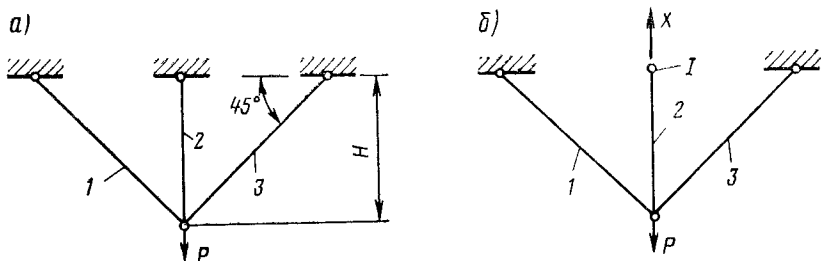


Рис. 1.2. Схемы к расчету по методу сил

Вычисляем удельную дополнительную энергию для каждого стержня:

$$u_2^* = \int_0^{\sigma_2} \varepsilon d\sigma = \int_0^{\sigma_2} \frac{\sigma^2}{b^2} d\sigma = \frac{1}{3b^2} \left( \frac{X}{F} \right)^3;$$

$$u_1^* = u_3^* = \frac{1}{3b^2} \left( \frac{P-X}{\sqrt{2} F} \right)^2.$$

Полная дополнительная энергия основной системы

$$U^* = \frac{1}{3F^2 b^2} [(P-X)^3 + X^3].$$

В соответствии с формулой Кротти-Энгессера вычислим частную производную от дополнительной энергии по силе  $X$  и учтем при этом, что в заданной системе перемещение точки  $I$  равно нулю (рис. 1,2,б). Тогда получим

$$\frac{\partial U^*}{\partial X} = \frac{1}{3F^2 b^2} [3(P-X)^2(-1) + 3X^2] = 0,$$

откуда следует  $X = P/2$ . Таким образом, усилия в стержнях:

$$N_1 = N_3 = P/(2\sqrt{2}); N_2 = P/2.$$

С принципом возможных перемещений связан один из эффективных методов для приближенных расчетов конструкций — метод Ритца. В качестве искомого принимаем перемещения:

$$u(x, y, z) = \sum_i a_i u_i(x, y, z); \quad v(x, y, z) = \sum_i b_i v_i(x, y, z);$$

$$w(x, y, z) = \sum_i c_i w_i(x, y, z),$$

где  $u_i, v_i, w_i$  — задаваемые  $n$  функций, которые должны удовлетворять граничным условиям задачи (по крайней мере кинематическим);  $a, b, c$  — неизвестные (искомые) параметры.

Подставляя функции перемещений в выражение для полной энергии системы ( $\Pi = U - W$ ), получим функцию от  $3n$  параметров. Для определения неизвестных параметров используем условие минимума полной энергии, т. е. принцип стационарности потенциальной энергии,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial b_i} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial c_i} = 0 \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, n.$$

В общем случае получаем  $3n$  нелинейных уравнения относительно параметров  $a, b, c$ , вычислив которые, решим задачу.

Если известно решение линейной задачи  $u^*(x, y, z), v^*(x, y, z), w^*(x, y, z)$ , то по методу Ритца получим:

искомые перемещения

$$u(x, y, z) = au^*(x, y, z), \quad v(x, y, z) = av^*(x, y, z), \quad w(x, y, z) = aw^*(x, y, z);$$

условие для определения неизвестного параметра  $a$ :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a} = 0.$$

Покажем, как применяется метод Ритца к решению физически нелинейной задачи. Возьмем консольную балку прямоугольного поперечного сечения, к свободному концу которой приложена сила  $P$ . Закон деформирования материала балки определяется уравнением  $\sigma = a\varepsilon^{1/2}$ . Требуется найти прогиб  $w_0$  свободного конца балки.

Зададим функцию прогибов балки

$$w = \frac{w_0}{2l^3} (x^3 - 2l^2 x + 2l^3).$$

Предположим, что начало координат помещено на свободном конце балки. Выбранная аппроксимирующая функция удовлетворяет как кинематическим, так и статическим граничным условиям на концах балки, что следует признать весьма удачным (принять линейное решение задачи). Для произвольного сечения рассмотрим точку, расположенную на расстоянии  $y$  от нейтральной оси. Деформации в этой точке

$$\varepsilon = \kappa y = 3w_0 xy/l^3/2.$$

Удельная энергия

$$u = \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon} a\varepsilon^{1/2} d\varepsilon = 2\sqrt{3} a (w_0 xy/l^3)^{3/2}.$$

Полная энергия деформации

$$U = \int_V u dV = 2 \int_0^l \left[ \int_0^{h/2} \int_0^b u b dy \right] dx = 2\sqrt{6} abh^{5/2} w_0^3/2/(25l^2).$$

Здесь  $l$  — пролет консольной балки;  $b$ ,  $h$  — соответственно ширина и высота поперечного сечения балки.

Учитывая, что  $\Pi = U - Pw_0$ , а также используя принцип стационарности потенциальной энергии, получим

$$\frac{\partial \Pi}{\partial w_0} = \frac{3\sqrt{6} abh^{5/2} w_0^2/2}{25l^2} - P = 0.$$

Окончательно имеем для конца консоли прогиб

$$w_0 = 625P^2 l^4 / (54a^2 b^2 h^5),$$

что на 7% меньше точного значения.

Отметим, что в случае активного процесса нагружения и деформирования (без разгрузки) методы решения упругих физически нелинейных задач полностью применимы для расчетов конструкций с неупругим поведением, вызванным, например, пластическими деформациями стали.

### 1.3. МЕХАНИКА РАЗРУШЕНИЯ СТАЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Обычный расчет на прочность, в том числе в упругопластической стадии, не гарантирует конструкцию от наступления хрупких разрушений. Наличие в элементах различного рода начальных дефектов (трещин, пор, включений, расслоений, непроваров), а также образующиеся в процессе эксплуатации повреждения (циклические, коррозионные, деформационного старения) могут снижать разрушающую нагрузку в 1,5—4 раза по сравнению с пределом текучести материала. Особенно чувствительным к начальным дефектам стали повышенной и высокой прочности.

Вопросы разрушения стальных конструкций могут решаться с обеих позиций механики разрушения. Здесь следует выделить несколько аспектов проблемы.

Х а р а к т е р р а з р у ш е н и я может быть различным в зависимости от свойств материала, условий его нагружения и работы, геометрических параметров и т. п. Поэтому целесообразно выделить некоторые специфические виды разрушения. К ним можно отнести идеально-пластическое и хрупкое разрушения. Эти виды разрушения предельные и между ними лежит широкий класс упруго-пластических разрушений. Практический путь решения данного вопроса заключен в рамках феноменологического подхода с использованием соответствующих физических критериев. Расчетный аппарат механики разрушения опирается на теорию упругости и пластичности. Применение феноменологического подхода к расчету разрушения поликристаллических материалов, имеющих неоднородности строения, требует ряда пояснений.

Большинство реальных материалов неоднородны. Если эти неоднородности по линейным размерам соизмеримы с размерами всего тела, их называют макроскопическими. Если же неоднородности по своим размерам во много раз меньше размеров тела, их называют микроскопическими. С т а л ь — микроскопически неоднородный материал. Ее поликристаллическая структура, местные флюктуации химического состава и другие факторы, порождают флюктуации механических свойств и соответственно локальные возмущения поля напряженного состояния [13]. Математической точке сплошной среды соответствует физическая точка — сравнительно малый объем, содержащий достаточно большое число атомов. Г. Лоренц предложил различать математически и физически бесконечно малые величины.

Учитывая, что междуатомные расстояния в кристаллах имеют размер около 0,1 нм, можно наименьший линейный размер физической точки (когда еще сохраняются свойства сплошной среды) принять равным  $10-10^2$  нм. Но это не обеспечивает еще сопоставимости результатов расчета и опытных данных, что объясняется различием напряжений и деформаций элементов структуры и средних напряжений. Поэтому [28], кроме указанных физических точек, необходимо ввести такие физические точки  $W$ , свойства которых определялись

бы экспериментально на поликристаллических образцах, как макроскопические величины, а напряжения и деформации были бы сравнимы с расчетными. Для стальной структуры имеют линейные размеры около  $10^3$ — $10^5$  нм и соответственно для физической точки  $W$  линейные размеры равны 0,1 — 1 мм.

Физическим точкам  $V$  соответствуют микронапряжения  $\xi$ , а точкам  $W$  — напряжения  $\sigma$  макроскопические.

Рассмотрим одноосное центральное растяжение поликристаллического образца. Макроскопическое напряжение в поперечном сечении образца равно среднему взвешенному значению величины (моменту второго порядка):

$$\sigma_x = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_x \rho(\xi_x) d\xi_x,$$

где  $\rho(\xi_x)$  — плотность распределения микронапряжений в поперечном сечении.

Таким образом, физической точке  $W$  соответствует достаточно большое число физических точек  $V$ , т. е. в объеме  $W$  содержится большое число объемов  $V$ .

Аналогичные зависимости имеют место для деформаций и физико-механических характеристик материала, что служит основой для статистической теории прочности (пластичности). Следовательно, измеряемые при экспериментальных исследованиях напряжения и деформации в точке соответствуют некоторым средним значениям, удовлетворяющим нужды практики.

Идеально-пластическое разрушение обычно связано с пластическим течением материала; предполагается, что материал обладает значительным запасом пластических свойств. Диаграмма деформирования принимается по Прандтлю или по схеме жесткопластического тела. Разрушающие (предельные) нагрузки характеризуются определенными экстремальными свойствами, из которых вытекают методы их нахождения<sup>1</sup>.

Для получения основного энергетического уравнения рассмотрим тело объемом  $V$ , ограниченное поверхностью  $S = S_F + S_v$ . На части поверхности тела  $S_F$  приложены силы  $F_n = X_{nk}$  (силовое воздействие), а на части  $S_v$  заданы скорости точек  $v_0 = v_{0nk} \vec{i}$  (кинематическое воздействие). Считаем, что объемные силы отсутствуют. Поскольку тело находится в равновесии, тензор напряжений  $\sigma_{ij}$  удовлетворяет условию  $\frac{\partial \sigma_{ii}}{\partial x_j} = 0$ . На поверхности  $S_F$ , где приложены внешние силы, имеем условие  $\sigma_{ij} n_j = X_{ni}$ , где  $n_j$  — направляющие косинусы нормали  $\vec{n}$ . На поверхности  $S_v$ , где задано поле скоростей, удовлетворяются условия  $v_i =$

<sup>1</sup> Ниже при выводах используем обозначения векторного и тензорного анализа.

$= v_{0i}$ . Заданному полю скоростей соответствуют скорости деформаций (относительных удлинений  $\xi$  и углов скашивания  $\eta$ )

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

Внешние воздействия, силовое и кинематическое, приложенные к телу, в общем случае считаются не зависимыми между собой. Используя принцип возможной работы, получим [20]

$$\int \sigma_{ij} \xi_{ij} dV = \int X_{ni} v_i dS. \quad (1.11)$$

Здесь интеграл в левой части отражает «рассеяние» всех внутренних сил и распространяется по всему объему тела. Интеграл в правой части дает «мощность» всех внешних сил и распространяется по всей поверхности тела. Если некоторые части тела не деформируются, а испытывают лишь жесткое перемещение, то для них  $\xi_{ij} = 0$ .

При использовании схемы жестко-пластического тела на некоторых поверхностях имеют место разрывные поля напряжений и скоростей. Можно показать [20], что наличие разрывов в напряжениях не изменяет вида уравнения (1.11).

Разрывы поля скоростей на некоторых поверхностях приводят к мощности составляющих напряжений, лежащих в плоскости разрыва:

$$W_p = \int \tau [v] dS_p,$$

где  $[v] = |v^+ - v^-|$  — размер разрыва касательной составляющей скорости;  $\tau$  — касательная составляющая напряжения в направлении вектора разрыва  $(\vec{v}^+ - \vec{v}^-)$ .

Здесь интеграл распространяется на все поверхности разрыва  $S_{pK}$ . Тогда для разрывных полей основное энергетическое уравнение разрушения получит вид:

$$\int \sigma_{ij} \xi_{ij} dV + \int \tau [v] dS_p = \int X_{ni} v_i dS. \quad (1.12)$$

Если скорости деформации связаны с напряжениями ассоциированным законом течения, то поверхность разрыва служит поверхностью скольжения и  $\tau [v] > 0$ .

При определении разрушающих нагрузок обычно рассматривают пропорциональное нагружение. Пусть внешние силы, действующие на  $S_F$ , возрастают пропорционально одному параметру  $\kappa > 0$ , т. е.

$$X_{ni} = \kappa_K X_{ni}^{(0)},$$

где  $X_{ni}^{(0)}$  — заданное начальное распределение нагрузки.

На поверхности  $S_v$  скорости равны нулю. В этом случае основное энергетическое уравнение идеально пластического разрушения принимает вид:

$$\int \sigma_{ij} \xi_{ij} dV + \int \tau [v] dS_p = \kappa \int X_{ni}^{(0)} v_i dS_F.$$

Рассмотрим два практических метода определения предельных (разрушающих) нагрузок.



Первый метод дает верхнюю оценку предельной нагрузки и называется кинематическим методом. При использовании этого метода вводят кинематически возможное поле скоростей  $v'_i$ , удовлетворяющее условию несжимаемости и нулевым граничным условиям  $v_{0i} = 0$  на  $S_v$  (неподвижные опоры). Таким образом, в кинематическом методе задается возможный механизм разрушения. Заданным (возможным)  $v'_i$  отвечают скорости деформации  $\xi'_{ij}$ , а последним по закону ассоциированного течения девиатор напряжений  $S'_{ij}$ , удовлетворяющий условию текучести. Следует отметить, что напряженное состояние, соответствующее заданному механизму разрушения, в общем случае не удовлетворяет уравнениям равновесия.

Состояние разрушения описывается равенством

$$\kappa_K \int X_{ni}^0 v'_i dS_F = \int \sigma_{ij}^* \xi'_{ij} dV + \int \tau^* [v'] dS'_p, \quad (1.13)$$

где  $\kappa_K$  — искомый кинематический коэффициент предельной нагрузки.

Принимаем закон течения в форме Сен-Венана — Мизеса:

$$\xi_{ij} = \frac{H}{2\tau_T} S_{ij} \text{ при } H = \sqrt{\frac{2}{3} \left[ (\xi_x - \xi_y)^2 + (\xi_y - \xi_z)^2 + (\xi_z - \xi_x)^2 + \frac{3}{2} (\eta_{xy}^2 + \eta_{yz}^2 + \eta_{xz}^2) \right]^{1/2}},$$

где  $H$  — интенсивность скоростей деформаций сдвига [45];  $\tau_T$  — предел текучести материала при сдвиге.

Тогда можно записать

$$\sigma_{ij}^* \xi'_{ij} = S'_{ij} \xi'_{ij} = \tau_T H', \text{ и } \tau^* = \tau_T.$$

С учетом изложенного, из формулы (1.13) получим выражение для определения кинематического коэффициента предельной нагрузки:

$$[\kappa_K] = \frac{\tau_T \int H' dV + \int [v'] dS'_p}{\int X_{ni}^0 v'_i dS_F}.$$

Итак, кинематический метод дает верхнюю оценку разрушающей нагрузки.

Возьмем, например, балку пролетом  $l$  с заделанными концами под действием равномерно распределенной нагрузки  $q$ . Материал — жестко-пластический. Механизм разрушения представим в виде двухзвенной конструкции с пластическими шарнирами в заделках и в середине пролета. Изгибающий момент в пластическом шарнире достигает предельного значения  $M_T$ . Каждое звено механизма разрушения поворачивается в заделке с угловой скоростью  $\omega$ . Рассеяние имеет место в шарнирах.

Тогда состояние разрушения, описываемое уравнением (1.13), для данного примера получит вид:

$$2 \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{4} = M_T \omega + 2M_T \omega + M_T \omega.$$

Отсюда значение кинематической нагрузки  $q_k = 16 M_T/l^2$ , т. е. совпадает с точным значением.

Второй метод дает нижнюю оценку предельной нагрузки и называется статическим методом. При использовании этого метода вводят статически возможные напряженные состояния текучести  $\sigma'_{ij}$ , удовлетворяющие внутри тела уравнениям равновесия. Напряженное состояние  $\sigma_{ij}$  может быть в общем случае разрывным.

Внешние нагрузки на  $S_F$  представляем условием:  $X'_{ni} = \kappa_c X_{ni}^{(0)}$ , где  $\kappa_c$  — значение параметра нагрузки. Состояние разрушения описывается уравнением

$$\kappa_c \int X_{ni}^{(0)} v_i dS_F = \int \sigma'_{ij} \xi_{ij} dV + \int \tau' [v] dS_p. \quad (1.14)$$

Здесь  $\kappa_c$  выступает в качестве искомого статического коэффициента предельной нагрузки.

Для рассмотренной балки, защемленной по двум концам, необходимо построить эпюру изгибающих моментов, не превосходящих  $M_T$ , и уравновешенную с внешними силами. В данном случае будет иметь место криволинейная эпюра с отрицательными значениями  $M_T$  в заделке и положительным в середине пролета. Уравнение для определения разрушающих нагрузок будет то же, что и в кинематическом методе.

Тогда статическая нагрузка  $q_c = 16 M_T/l^2$ , т. е. совпадает с точным значением.

Пластическая деформация в размере до 0,0025 служит критерием эксплуатационной прочности, т. е. состоянием, при котором еще не происходит разрушения (см. п. 1.4). Деформационный критерий можно использовать также в случае пластического (вязкого) разрушения. Именно деформация, а не напряжение, может наиболее полно отразить ухудшение свойств металла, накопление повреждений, учесть вид напряженного состояния. Особенно ярко это видно на диаграммах деформирования при  $\sigma > \sigma_T$ , когда большим изменениям деформаций соответствуют малые приращения напряжений. При одноосном растяжении разрушение наступает при определенном напряжении  $\sigma = \sigma_{раз}$  и некоторой предельной пластической деформации  $\epsilon_p$ , пр.

Возьмем обобщенную диаграмму деформирования  $\sigma_i - \epsilon_{ip}$ , где  $\epsilon_{ip}$  определяется по истинной относительной деформации  $\epsilon_i = \int_{l_0}^{l_1} dl/l = \ln(l_1/l_0)$ . Истинная пластическая деформация обладает свойством аддитивности и удовлетворяет условию постоянства объема, т. е.  $\epsilon_{1p} + \epsilon_{2p} + \epsilon_{3p} = 0$ .

Если задана истинная диаграмма деформирования  $\sigma - \epsilon$  при одноосном растяжении, можно перейти к истинной диаграмме  $\sigma_i - \epsilon_{ip}$  (рис. 1.3). Обозначая главные пластические деформации  $\epsilon_{1p}$ ,  $\epsilon_{2p}$ ,  $\epsilon_{3p}$  при одноосном растяжении имеем  $\sigma = \sigma_1$ ;  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ;

$\varepsilon_{1p} = \varepsilon_{3p} = -0,5 \varepsilon_{1p}$ . В обобщенной диаграмме  $\sigma_1 - \varepsilon_{1p}$  принято, что интенсивность напряжений

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]^{1/2}, \quad (1.15)$$

а интенсивность пластической деформации

$$\varepsilon_{ip} = \varepsilon_i - \varepsilon_{ie} = \frac{\sqrt{2}}{3} [(\varepsilon_{1p} - \varepsilon_{2p})^2 + (\varepsilon_{2p} - \varepsilon_{3p})^2 + (\varepsilon_{1p} - \varepsilon_{3p})^2]^{1/2}$$

при  $\varepsilon_{ie} = \sigma_i/E$ .

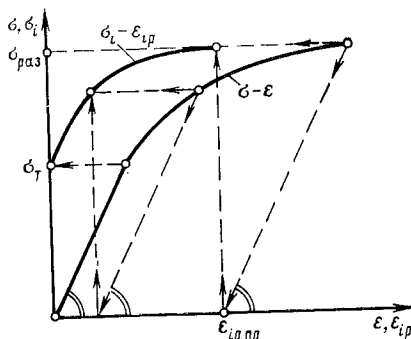


Рис. 1.3. Диаграммы деформирования стали:  
 $\varepsilon_{ip}, \text{ пр}$  — предельная деформация разрушения стали

Поставим задачу определения предельной пластической деформации в случае сложного напряженного состояния, при которой происходит разрушение. Будем считать характеристикой разрушения истинное напряжение разрушения  $\sigma_{\text{раз}}$  при осевом растяжении. При сложном напряженном состоянии разрушение наступит тогда, когда наибольшее главное напряжение  $\sigma_1$  достигнет значения  $\sigma_{\text{раз}}$ , соответствующего разрушению при одноосном растяжении, а пластическая деформация разрушения будет  $\varepsilon_{1p}$ .

Таким образом, искомой величиной является предельная деформация  $\varepsilon_{1p}$ .

Зададим выражение для обобщенной кривой деформирования в виде степенной функции

$$\sigma_i = a \varepsilon_{ip}^m, \quad (1.17)$$

где  $a, m$  — постоянные для данной марки стали.

Показатель степени упрочнения  $m$  зависит от класса прочности стали и принимается [33]:

для углеродистых и низколегированных сталей  $m = 0,25 \div 0,3$ ;  
для высокопрочных (закаленных) сталей  $m = 0,03 \div 0,05$ .

Рассмотрим общий случай трехосного напряженного состояния с максимальным главным напряжением  $\sigma_1$ .

Вводя обозначения  $\sigma_2/\sigma_1 = \alpha_2$  при  $0 \leq \alpha_2 \leq 1$  и  $\sigma_3/\sigma_1 = \alpha_3$  при  $0 \leq \alpha_3 \leq 1$ , для интенсивности напряжений получим

$$\sigma_i = \sigma_1 [1 - \alpha_2 + \alpha_2^2 - \alpha_3 + \alpha_3^2 - \alpha_2 \alpha_3]^{1/2}. \quad (1.18)$$

Для интенсивности пластической деформации в общем случае

$$\varepsilon_{ip} = \frac{2}{3} \left( \frac{3}{2} \cdot \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} - \frac{1}{2G} \right) \sigma_i.$$

Поскольку в пластической стадии  $\mu = 0,5$ , получим

$$\varepsilon_{ip} = (1/E_c - 1/E) \sigma_i. \quad (1.19)$$

В общем случае главная пластическая деформация

$$\varepsilon_{1p} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\varepsilon_{ip}}{\sigma_i} (\sigma_1 - \sigma_0).$$

После подстановки значения  $\varepsilon_{ip}$  из уравнения (1.19) получим

$$\varepsilon_{1p} = \sigma_1 (1/E_c - 1/E) (1 - 0,5\alpha_2 - 0,5\alpha_3). \quad (1.20)$$

Используя формулы (1.19) и (1.20), можно через компоненты главной деформации выразить интенсивность пластической деформации

$$\varepsilon_{ip} = \frac{\varepsilon_{1p}}{1 - 0,5\alpha_2 - 0,5\alpha_3} [1 - \alpha_2 + \alpha_2^2 - \alpha_3 + \alpha_3^2 - \alpha_2 \alpha_3]^{1/2}. \quad (1.21)$$

Подставим данное выражение в уравнение (1.17) и последнее приравняем выражению (1.18). Таким образом выразим максимальное главное напряжение  $\sigma_1$  через максимальную главную компоненту деформации  $\varepsilon_{1p}$ , т. е.

$$\sigma_1 = a \frac{\varepsilon_{1p}^m}{(1 - 0,5\alpha_2 - 0,5\alpha_3)^m} (1 + \alpha_2 + \alpha_2^2 - \alpha_3 + \alpha_3^2 - \alpha_2 \alpha_3)^{0,5(m-1)}. \quad (1.22)$$

Так как разрушение происходит при  $\sigma_1 = \sigma_{раз}$ , то пластическая деформация разрушения (искомая величина) будет  $\varepsilon_{1p} = \varepsilon_{1p, пр}$ .

При осевом растяжении разрушающему напряжению  $\sigma_{раз}$  на обобщенной диаграмме соответствует предельная деформация  $\varepsilon_{ip, пр}$ .

Приравняем выражение  $\sigma_{раз} = a \varepsilon_{ip, пр}^m$  уравнению (1.22). После преобразований получим для случая трехосного напряженного состояния значение предельной деформации разрушения:

$$\varepsilon_{1p, пр} = \varepsilon_{ip, пр} (1 - 0,5\alpha_2 - 0,5\alpha_3) (1 - \alpha_2 + \alpha_2^2 - \alpha_3 + \alpha_3^2 - \alpha_2 \alpha_3)^{\frac{1-m}{2m}}. \quad (1.23)$$

Из анализа полученных формул устанавливаем, что при сложном напряженном состоянии и положительных  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  предельная пластическая деформация уменьшается, т. е. отношение  $\varepsilon_{1p, пр} / \varepsilon_{ip, пр} < 1$ . Физический смысл этого: развитие пластических деформаций начинается на более высоком уровне напряжений, чем при осевом растяжении, однако при этом пластичность стали, как материала уменьшается. Степень снижения пластичности существенно зависит от показателя упрочнения  $m$  стали. Для высокопрочных сталей ( $m \approx 0,05$ ) с двухосным растяжением имеет место резкое снижение предельной пластической деформации разрушения в широком диапазоне отношений компонентов главных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . При трехосном растяжении пластическая деформация разрушения может стать очень малой и для обычных пластичных сталей ( $m \approx 0,3$ ). При равномерном трехосном растяжении ( $\alpha_2 = \alpha_3 = 1$ ) по изложенной теории пластическая деформация разрушения для всех сталей равна нулю, т. е. разрушение происходит только при упругой деформации (хрупкое разрушение).

Для высокопрочных сталей при трехосном растяжении область отношений компонентов главных растягивающих напряжений, спо-

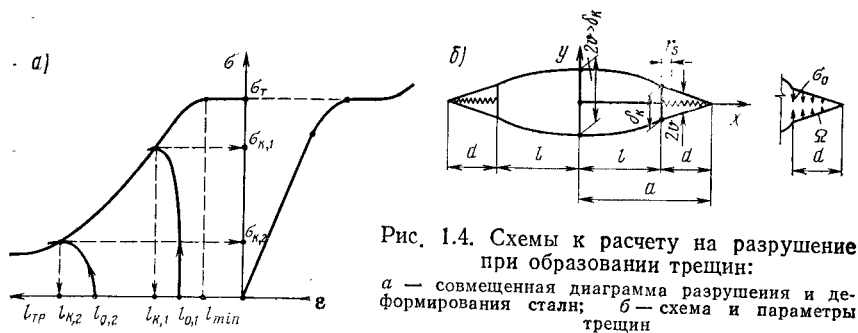


Рис. 1.4. Схемы к расчету на разрушение при образовании трещин:  
 а — совмещенная диаграмма разрушения и деформирования стали; б — схема и параметры трещин

способных вызвать хрупкое разрушение, достаточно обширна, что нужно учитывать при проектировании конструкций и узлов из такой стали.

Хрупкие и упруго-пластические виды разрушений связаны с развитием и распространением (движением) микроскопических трещин в материале. Поэтому изучение напряженно-деформированного состояния вокруг трещины — весьма важная задача, в значительной степени определяющая разрушение. Критерий начала распространения трещины составляет основу механики разрушения и он не следует из уравнений равновесия или движения механики сплошной среды. Это физический критерий и одновременно дополнительное краевое условие при решении вопроса о предельном равновесии тела с трещиной. Под предельным равновесием здесь понимается состояние, когда трещина получает возможность распространяться.

Отсюда следует, что для оценки разрушения обычных физико-механических характеристик материала недостаточно. В частности, традиционная диаграмма деформирования  $\sigma - \epsilon$  не отражает в достаточной степени процесс разрушения. Поэтому в дополнение к диаграмме деформирования рассматривают диаграмму разрушения материала, для получения которой испытывают плоские образцы с начальной центральной сквозной трещиной. В процессе нагружения образца наблюдается увеличение трещины до определенной длины (называемой критической) и размера напряжения в неослабленном сечении образца (называемым критическим напряжением), когда происходит разрушение. Совмещенная диаграмма разрушения и деформирования для пластичного материала показана на рис. 1.4, а. Если длина трещины не превышает некоторого размера  $l_{min}$ , то имеет место общая текучесть материала и происходит его пластическое разрушение. При большем размере трещины разрушающее напряжение (для хрупкого или квазихрупкого разрушения) будет меньше предела текучести.

Критическая диаграмма разрушения (см. рис. 1.4, а) — предельная по отношению к докритическим диаграммам разрушения. Последние получают на образцах с начальными трещинами как зави-

симость напряжения в неослабленном сечении образца от длины устойчивой трещины для заданной толщины образца. Таким образом на докритической диаграмме разрушения наблюдаются два характерных размера трещины: начальная  $l_{0i}$  и конечная (критическая)  $l_{ki}$  длина. Критической длине соответствует критическое напряжение разрушения  $\sigma_{ki}$ . Можно отметить, что докритическая диаграмма разрушения оценивает способность материала тормозить трещину. Распространение (рост) трещины связано с состоянием материала в окрестности вершины трещины. Для хрупких (стеклоподобных) материалов в вершине трещины при ее росте имеет место разрыв материала, близкий по характеру с разделением атомных слоев. Именно со случая идеально упругого тела, рассмотренного А. Гриффитсом, и начала развиваться механика разрушения.

Для таких материалов, как сталь, продвижение трещины связано с пластическим деформированием по ширине трещины. При малых размерах пластической зоны в вершине трещины разрушение (по предложению Г. Ирвина) можно условно рассматривать как квази-хрупкое.

Вопросы хрупкого и квази-хрупкого разрушения изучает линейная механика разрушения. Разрушение, связанное с развитием протяженных пластических зон (или занимающих значительные объемы), имеющих одинаковый порядок с длиной трещины, рассматривает нелинейная механика разрушения.

Рассмотрим условия, при которых трещина получает возможность распространяться.

При развитии трещины на величину  $\delta S$  (приращение площади) соблюдается энергетическое условие

$$\delta G = G \delta S, \quad (1.24)$$

где  $\delta G$  — энергия разрушения, необходимая для образования новой поверхности разрыва  $\delta S$ . Для стали это в основном работа пластической деформации в объемах перед трещиной.

Величина  $G$  определяет поток энергии в вершину трещины (на единицу площади), т. е. представляет собой освобождающуюся упругую энергию тела при развитии трещины. Если линейные размеры пластической зоны не превышают 20% от длины  $l$  трещины, то поток упругой энергии можно вычислить на основе упругого решения задачи. Такой подход соответствует концепции квазихрупкого разрушения Гриффитса — Орована — Ирвина применительно к пластичным материалам.

Прежде чем перейти к вычислению соответствующих параметров разрушения, необходимо ввести характеристики трещины (рис. 1, 4, б). Полудлину трещины обозначим  $l$ , а длину пластической зоны в одной из вершин трещины —  $d$ . Берега трещины получают расхождение на величину  $2v > \delta_k$  в зоне длиной  $2l$  и на величину  $2v < \delta_k$  в пластической зоне. При  $x = l$  раскрытие трещины равно  $\delta_k$  и оно считается критическим. Разрыв перемещений в пределах пластической зоны происходит вследствие текучести материала

и образования своего рода «шейки» при растяжении. При  $x = a$ ,  $v = 0$ , т. е. за пределами пластической зоны материал работает упруго. Длина  $d$  пластической зоны находится из решения упруго-пластической задачи и для растягиваемой бесконечной плоскости с трещиной ее можно определить из выражения

$$\frac{l}{a} = \cos \frac{\pi\sigma}{2\sigma_T} \text{ при } a = l + d, \quad (1.25)$$

где  $\sigma$  — невозмущенное напряжение (на бесконечности).

Общий случай напряженно-деформированного состояния у вершины трещины можно получить путем наложения напряжений трех частных видов деформаций, которые обычно рассматривают самостоятельно. Первый их вид связан с отрывным смещением, когда поверхности трещины расходятся во взаимно противоположных направлениях. Второй вид деформаций соответствует перемещениям, при которых поверхности трещины скользят друг по другу вдоль. Третий вид связан с антиплоской деформацией, по типу возникающей при разрезании ножницами.

Рассмотрим только первый вид деформации, однако рассуждения будут носить общий характер.

Вернемся к определению потока энергии в вершину трещины. При продвижении трещины на величину  $\Delta x$  формула имеет вид:

$$G = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta x} \int_0^{\Delta x} \sigma_y 2v dx. \quad (1.26)$$

Для бесконечной растягиваемой плоскости при плоской деформации

$$G = (1 - \mu^2) K^2 / E; \quad (1.27)$$

при плоском напряженном состоянии

$$G = K^2 / E, \quad (1.27')$$

где  $K$  — коэффициент интенсивности напряжений вблизи вершины трещины, Н/см<sup>3/2</sup>.

Этот коэффициент определяется для каждого вида деформаций и зависит от марки стали, толщины образца, условий нагружения. Для рассматриваемого случая бесконечной растягиваемой напряжением  $\sigma$  плоскости

$$K = \sigma \sqrt{\pi l}. \quad (1.28)$$

Отсюда при известной критической величине  $K$  (характеристика материала) и заданном  $\sigma$  можно найти допустимую (предельную) длину трещины. Возможна иная постановка — при заданной длине трещины можно вычислить допустимый уровень напряжений.

Величину  $K_{кр}$ , характеризующую склонность материала к хрупкому разрушению, определяют на образцах специальной формы, при этом численное значение ее по критическому

напряжению  $\sigma_k$  и критической длине  $l_k$  трещины находят из формулы Ирвина (методом приближений)

$$K_k = \sigma_k \left[ b \operatorname{tg} \left[ \frac{\pi}{b} \left( l_k \mid \frac{K_k^2}{2\pi\sigma_T^2} \right) \right] \right]^{1/2}, \quad (1.29)$$

где  $b$  — ширина образца.

Второй член в формуле (1.29) учитывает пластическую зону перед трещиной при плоском напряженном состоянии. Формула справедлива при  $\sigma_k < 0,8 \sigma_T$ , т. е. для квазихрупкого разрушения. Если материал не имеет выраженной площадки текучести, вместо  $\sigma_T$  принимают значение предела прочности. Это вызывается также поперечным стеснением деформаций. В случае объемного напряженного состояния в условиях плоской деформации в формуле (1.29) вместо значения  $K_k^2/(2\pi\sigma_T^2)$  подставляют  $K_k^2/(6\pi\sigma_T^2)$ . Сущность рассматриваемой теории квазихрупкого разрушения заключается в том, что в теорию идеально упругого хрупкого разрушения вводится поправка на пластическую зону. При этом длина  $l$  трещины увеличивается на половину длины пластической зоны, т. е.  $0,5 d = K_k^2/(2\pi\sigma_T^2)$ .

Для случая хрупкого разрушения ( $d = 0$ ) энергетический критерий ( $EG_k$ ) совпадает с силовым критерием  $K_k$ , т. е.  $K_k^2 = EG_k$ . Другими словами, трещина получает возможность распространяться при одном из условий: 1) когда поток энергии в вершину трещины достигает критической величины  $G_k = \delta\Gamma/\delta S = \text{const}$ ; 2) когда интенсивность напряжений вблизи трещины достигает критического значения  $K_k$ .

Величина  $G$  обычно связывается с  $\gamma$ , которая характеризует поверхностную интенсивность энергии, затрачиваемую на хрупкое разрушение, т. е.  $G = 2\gamma$ .

А. Гриффитс величину  $2\gamma$  отождествлял с поверхностной энергией твердого тела, типа поверхностного натяжения для жидкости. Для материалов типа стали развитие трещины зависит главным образом от пластической деформации около вершин трещины. В тех случаях когда пластические зоны не малых размеров, пользуются деформационными критериями.

Значение раскрытия  $\delta_k$  трещины также можно считать константой материала. Критическое раскрытие  $\delta_k$  трещины наблюдается в точке с координатами  $x = l, y = 0$ . В зоне пластичности  $l \leq x \leq l + d$  материал будет иметь постоянное напряжение  $\sigma_0$ , равное пределу текучести или пределу прочности в зависимости от вида диаграммы. Деформационный критерий  $\delta_k$  совпадает с силовым  $K_k$  и энергетическим  $EG_k$  критериями разрушения только при больших длинах трещин и малой (локальной) пластической зоне, т. е.  $K_k^2 = EG_k = E\sigma_0\delta_k$ . При малых длинах трещин, расхождения получаются значительными. §

Имеются иные виды деформационных критериев упругопластического разрушения. В частности, интересен деформационный кри-



терий Макклинтока. Он предполагает, что распространение трещины происходит при достижении пластической деформацией предельного значения на некотором расстоянии  $r_S$  перед концом трещины, т. е. в точке с координатой  $l + r_S$  (рис. 1,4,б). Параметр  $r_S$  трактуется как постоянная материала (структурный параметр). Предельная пластическая деформация определяется из обычных опытов на растяжение.

Для решения задач упругопластического разрушения эффективным оказывается в а р и а ц и о н н ы й п р и н ц и п теории трещин [38].

Рассмотрим случай, когда пластическая деформация сосредотачивается в узкой зоне, вытянутой перед вершиной трещины. При таком предположении достаточно решить упругую задачу вместо упругопластической. Сущность допущения заключается в том, что пластическая зона заменяется дополнительным разрезом, по берегам которого прикладываются усилия, эквивалентные действию пластически деформированного материала. Упрощение задачи, а точнее — ее линеаризация, достигается за счет достаточно малой толщины пластической зоны, равной  $2v(x)$ . Длина пластической зоны в принципе не ограничивается, а при достаточно малой длине трещины возможно наступление общей текучести в данном сечении тела: при этом  $d \rightarrow \infty$ .

Энергетический критерий равновесия для трещины выражает условие сохранения энергии при действительном или возможном приращении площади трещины:

$$\delta A = \delta W + \delta \Gamma, \quad (1.30)$$

где  $\delta A$  — механическая работа внешних сил;  $\delta W$  — объемная потенциальная энергия упругой деформации тела;  $\delta \Gamma$  — энергия разрушения.

В квазистатической постановке кинетическая энергия может быть принята равной нулю. При упругопластическом разрушении энергия разрушения определится в основном энергией пластической деформации, т. е.  $\delta \Gamma = \delta W_p$ .

К написанному вариационному условию необходимо присоединить три дополнительных условия: 1) на поверхности дополнительного разреза длиной  $d$  задаются напряжения  $\sigma_0$ , равные пределу текучести или пределу прочности; 2) длина пластической зоны определяется из условия непрерывности напряжений в конце этой зоны; в частности рекомендуется формула  $l/a = \cos[\pi\sigma/(2\sigma_0)]$ ; 3) вводится деформационный критерий критического состояния трещины  $\delta_{к.}$ . Он необходим для вычисления предельного значения  $\delta W_p = \int_{\Omega} |\sigma_{0i} \delta u_{i0}^*| dF$ .

Для условий симметричного нагружения получено [38] вариационное уравнение:

$$2 \int_{\Omega} |\sigma_{0i} \delta u_{i0}^*| dF - \delta \int_S (p_i + q_i) u_i dF + \delta \int_{\Omega} (\sigma_{0i} - p_i) u_i dF = 0, \quad (1.31)$$

где  $\delta$  — знак вариации;  $u_{i0}^*$  — перемещение в дополнительном разрезе  $d$ ;  $dF$  — дифференциал площади;  $p_i$  — напряжения от нагрузок  $q_i$  в теле, не содержащем трещину (мысленно прикладываются к контуру  $S$  трещины);  $q_i$  — заданные распределенные нагрузки на поверхности тела  $\Sigma$ ;  $u_i$  — перемещения точек поверхности трещины для тела, которое нагружено только на поверхности трещины  $S$  давлением  $p_i + q_i$ ;  $\Omega$  — поверхность дополнительного разреза.

Энергетический критерий в форме уравнения (1.31) позволяет решать целый класс задач теории трещин. Из него также следует частный случай идеально упругого хрупкого разрушения. Полагая  $\Omega = 0$  и вводя экспериментально определяемое значение поверхностной плотности  $\gamma$  энергии разрушения, получаем [38]

$$\delta \int [2\gamma - (p_i + q_i) u_i] dF = 0 \text{ или } 2\gamma - \int_0^l p(x) \frac{\partial v(x, l)}{\partial l} dx = 0. \quad (1.32)$$

При наличии узкой пластической зоны перед трещиной условие упругопластического разрушения принимает вид:

$$2\sigma_0 \int_l^a \frac{\partial v^*(x)}{\partial l} dx - \int_0^l \sigma_y \frac{\partial v}{\partial l} dx - \sigma_0 v(l, l) - \int_l^a (\sigma_y - \sigma_0) \frac{\partial v}{\partial l} dx = 0, \quad (1.33)$$

где  $\sigma_y = \sigma_y(x)$  — напряжение от заданной нагрузки, возникающее вдоль оси  $x$  в теле без трещины;  $v = v(x, l)$  — перемещения точек поверхности трещины в направлении оси  $y$ , возникающие от действия  $\sigma_y$  в области  $y = 0$ ,  $|x| \leq l$  и действия напряжений  $(\sigma_y - \sigma_0)$  в области трещины  $l < |x| \leq a$ .

В качестве примера рассмотрим упругопластическое разрушение неограниченной плоскости с одиночной прямолинейной трещиной  $y = 0$ ,  $|x| \leq l$ . Растягивающее напряжение на бесконечности равно  $p$ . Пластические зоны занимают отрезки  $y = 0$ ,  $l \leq |x| \leq a$ . В пределах пластических зон действует напряжение  $\sigma_0$ , равное, например, пределу прочности.

Перемещение  $v(x)$  точек разреза  $y = 0$ ,  $|x| \leq a$  от нагрузки  $p$ , приложенной на  $|x| < l$ , и напряжений  $-\sigma_0 + p$ , приложенных на  $l \leq |x| \leq a$ , имеет вид:

$$v(x) = \frac{(1-\mu^2)\sigma_0}{\pi E} \left[ 2 - \sqrt{a^2 - x^2} \left( \pi \frac{p}{\sigma_0} - 2 \arccos \frac{l}{a} \right) + \right. \\ \left. + (x-l) T(x, l) - (x+l) T(x-l) \right]$$

$$\text{при } T(x, l) = \ln \frac{a^2 - xl - \sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 - l^2)}}{a^2 - xl + \sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 - l^2)}}.$$

Для размера пластической зоны используется выражение

$$l/a = \cos(\pi p / (2\sigma_0)).$$

Перемещение  $u_{i0}^* = v^*(x)$  вычисляют на основе деформационного критерия  $\delta_R$  раскрытия трещины, т. е. принимают  $2v^*(l) = \delta_R$ . Функция  $v^*(x)$  линейная с максимальным значением  $2v^*(l) = \delta_R$  (при  $x = l$ ) и равна нулю при  $x = a$ .

Критическое значение нагрузки  $p_R$ , соответствующее началу распространения трещины, определяется [38] из уравнения

$$\frac{\pi\lambda}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi\lambda}{2} + \ln \cos \frac{\pi\lambda}{2} = e^{1/\xi} (\arccos e^{-1/\xi}) \sqrt{1 - e^{-2/\xi}} - \frac{1}{\xi} \quad \text{при } \lambda = \\ = \frac{p}{\sigma_0}, \quad \xi = \frac{l}{c_R}, \quad c_R = \frac{\pi E \delta_R}{8\sigma_0 (1 - \mu^2)},$$

где  $\delta_R$  — постоянная материала.

Критическое значение параметра  $\lambda^*$  определяет критическую нагрузку  $p^* = \lambda^* \sigma_0$ . На основе данного решения может быть построена критическая диаграмма разрушения при растяжении плоскости с трещиной, т. е. зависимость  $\lambda - \xi$ . Необходимо отметить, что для упругопластического разрушения плотность энергии разрушения не служит постоянной материала, так как длина  $d$  пластической зоны зависит от критического напряжения. В данном примере

$$2\gamma = \sigma_0 \delta_R \left[ \xi e^{1/\xi} (\arccos e^{-1/\xi}) \sqrt{1 - e^{-2/\xi}} - 1 \right].$$

Плотность энергии разрушения становится постоянной и равной  $2\gamma = \sigma_0 \delta_R$  при достаточно малых внешних нагрузках и длинных трещинах, когда  $\xi \rightarrow \infty$ .

Результат рассмотрения трех типов (хрупкого, квазихрупкого, упругопластического) разрушения при наличии трещин показывает, что теория хрупкого и квазихрупкого разрушений развиты более полно и в известных границах могут использоваться на практике.

Теория упругопластического разрушения даже в линеаризованной постановке более сложна, однако и она в ряде случаев может найти применение.

#### 1.4. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ УЧЕТА ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

Критерии несущей (эксплуатационной) способности сооружения должны быть, с одной стороны, сформулированы на основе положений строительной механики, а с другой — отражать физические процессы, происходящие при нагружении. Подходящим для данной цели критерием может быть пластическая деформация, размер которой ограничивается по ряду следующих соображений. В реальных сооружениях имеют дело с конструктивно прочностью элементов (из-за концентрации деформаций, остаточных напряжений и т. п.), поэтому повреждаемость материала и соединений, например сварных швов, в этих условиях допускается только ограниченная, что и отражает пластическая деформация. Как отмечает Ф. Макклинток, непрерывная цепь локальных разрушений

(из-за концентрации деформаций) не позволяет нагрузить конструкцию предельной нагрузкой, соответствующей такому состоянию, когда пластические деформации, значение которых много больше упругих, развиваются по всему объему конструкции [27].

Конструкции современных стальных пролетных строений тонкостенные и потеря их несущей способности по условиям местной устойчивости происходит при ограниченной пластической деформации. Пределом эксплуатационной способности сооружения [61] служит деформация, препятствующая процессу эксплуатации, поскольку ее прекращение происходит в доаварийном состоянии конструкции. СНиП II-A. 10-72, а также стандарт СЭВ 384-76 на первое место выдвигают степень потери эксплуатационной способности в той или иной группе предельных состояний, что в значительной степени определяется деформациями.

Таким образом, реальная работоспособность (прочность) материала и эксплуатационные требования приводят к тому, что предельное состояние будет иметь место при ограниченных значениях деформаций.

Рассмотрим интенсивность пластической деформации как критерий предельного состояния. На первый взгляд естественная, но в то же время далеко не всегда очевидная (даже в историческом плане), эта деформация как бы отражает степень повреждаемости материала, унифицирует ее. Инженерный подход к исследованию работы конструкции позволяет также установить и размер этой деформации, которая, как правило, не превышает 0,25%.

Интересно заметить, что в 30-е годы, когда наблюдался определенный подъем в исследовании конструкций в упругопластической стадии, тоже стоял вопрос о количественной оценке пластической деформации. Отмечалось, что предельное состояние в случае изгиба можно определять краевыми деформациями порядка единиц процентов [37]. Однако это не нашло в дальнейшем практического внедрения. Причиной, видимо, послужила нечеткость формулировки (рекомендовалось принимать в качестве критерия полную деформацию), а также то обстоятельство, что в формулы этот критерий не входил в качестве аргумента. Наиболее строгую трактовку общей максимальной деформации, как критерия предельного состояния по прочности для сечений, дал Г. Е. Бельский [5].

В машиностроении [73] максимальная общая деформация также используется как критерий, но по методике допускаемых напряжений.

Наиболее общая трактовка интенсивности пластической деформации как критерия предельного состояния по прочности дана автором [47], причем эта деформация входит в качестве аргумента в соответствующие формулы и уравнения.

В. Т. Койтер [21], рассматривая математические основы теории пластичности и отмечая недостатки расчета по предельному равновесию, указывает, что для оценки ограничения чрезмерных деформаций было бы желательно установить пределы пластических деформаций.

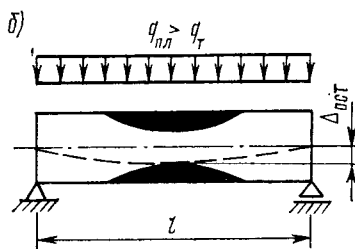
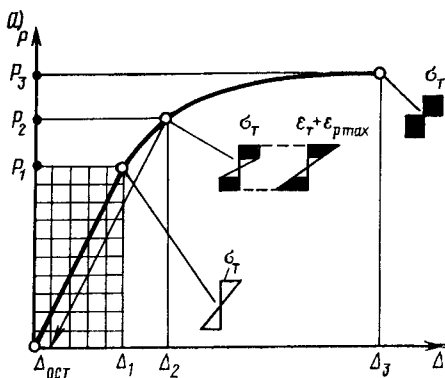


Рис. 1.5. Диаграмма  $P - \Delta$  и схема развития деформаций конструкций в упругопластической стадии

ций; однако такие пределы нельзя указать для локальных пластических деформаций. Подходящим критерием для оценки общей пластической деформации может служить затраченная в конструкции пластическая работа [21]. Пластическая работа, вообще говоря, может быть выражена через интенсивность остаточной (пластической) деформации, но принимать ее за критерий крайне неудобно, да и допустимое ее значение может быть установлено только через соответствующую допустимую деформацию.

Очевидно, что для установления критерия предельного состояния необходимо рассмотреть диаграмму работы конструкции вплоть до исчерпания несущей способности (рис. 1.5), учитывая при этом особенности методики предельных состояний, в частности, существование расчетных и нормативных нагрузок. За предельное состояние по прочности может быть принято такое, при котором ограниченные пластические деформации возникают в наиболее напряженных частях конструкции, но в любом случае при этом сохраняются области упругих деформаций. Максимальная пластическая деформация установлена в размере, не превышающем 0,0025. Предельному состоянию от расчетных нагрузок на кривой (см. рис. 1,5, а) соответствует точка с координатами  $P_2$ ,  $\Delta_2$ , т. е. упругопластическая стадия работы. Это состояние может достигаться лишь при неблагоприятном совпадении различных факторов, таких как: максимальное значение перегрузки и динамического коэффициента, одновременное действие максимальных значений различных сил, минимальное значение прочностных свойств материала. Какой точке диаграммы  $P - \Delta$  соответствуют нормативные значения нагрузок, которые можно считать максимальными для нормальной эксплуатации сооружения? Очевидно, что для подвижных нагрузок эта точка должна быть ниже точки с координатами  $P_1$ ,  $\Delta_1$ , т. е. конструкция должна работать в упругой стадии.

Таким образом, предельному состоянию по прочности от расчетных нагрузок соответствует упругопластическая стадия работы конструкции; при этом максимальная пластическая деформация ограничивается определенным значением. Одновременно нужна про-

верка на недопущение пластических деформаций от нормативных нагрузок.

Пластические деформации в предельном состоянии развиваются лишь в определенных частях элементов сооружения (см. рис. 1,5, б), однако по условиям эксплуатации требуется ее прекращение.

Критерию ограниченного развития пластичности в отдельных сечениях соответствует критерий по ограничению общих остаточных перемещений конструкции, который является функцией местных пластических деформаций, т. е.  $\Delta_{ост} = f(\epsilon_p)$ . Если местный критерий  $\epsilon_p$  характеризует степень повреждаемости материала и степень использования несущей способности сечения, то общее остаточное перемещение  $\Delta_{ост}$  характеризует работу сооружения с точки зрения прекращения эксплуатации в предельном состоянии. Недопущение пластических деформаций от нормативных (эксплуатационных) нагрузок диктуется следующими соображениями. Во-первых, жесткость сооружений проверяется от нормативных нагрузок в упругой стадии и изменение этого положения повлекло бы необходимость пересмотра норм жесткости, а это — самостоятельная и достаточно сложная проблема. Во-вторых, расчет на выносливость тоже от нормативных нагрузок (с учетом динамического коэффициента) в своей основе построен на упругой стадии, и изменение этого положения потребовало бы разработки теории малоциклового усталости для мостовых конструкций, что также является самостоятельной, весьма сложной проблемой.

Возможность снятия рассматриваемого ограничения имеется, но должна быть в каждом случае обоснована соответствующими исследованиями. В перспективе с переходом на методы теории надежности такие ограничения автоматически отпадут.

Работа стальной конструкции в предельном состоянии существенно зависит от свойств материала, в частности, диаграммы деформирования  $\sigma - \epsilon$ . Для применяемых сталей характерны два вида диаграмм — с площадкой текучести и без нее. При этом реальные диаграммы для расчетов схематизируют. Значение пластической деформации в наиболее

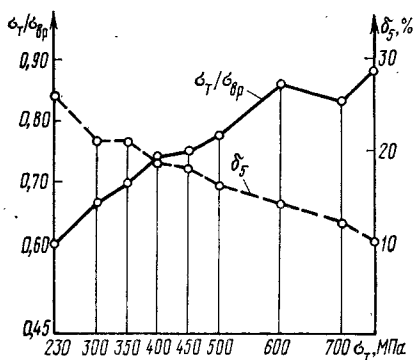


Рис. 1.6. Зависимости характеристик стали от класса прочности

напряженной точке определяет предельное состояние целого элемента сооружения.

Характерное свойство используемых сталей — повышение отношения  $\sigma_t/\sigma_{вр}$  и снижение относительного удлинения  $\delta_b$  с ростом прочности (рис. 1.6). Анализ работы конструкции в упругопластической стадии позволяет установить действительную несущую способность при любом виде диаграммы  $\sigma - \epsilon$ , однако коэффициент

надежности должен быть более высоким для диаграммы с упрочнением. Например, для сталей, у которых расчетное сопротивление определяется пределом прочности, принято вводить коэффициент условий работы  $m = 0,8$ . П а р а м е т р ы д и а г р а м м ы деформирования — исходные данные для расчетов и учет их действительных значений (или отклонений) важное обстоятельство.

Изменение нижнего предела текучести может повлиять на поведение конструкции в предельном состоянии, поэтому необходимо рассмотреть вопрос о возможных последствиях. На изменение нижнего предела текучести для мостовых конструкций могут оказывать влияние температура, скорость нагружения, механическое старение и форма сечения деталей элементов.

Понижение температуры ведет к повышению предела текучести с одновременным снижением пластических свойств стали. Существенной здесь является хрупкая прочность, что учитывается в расчетах введением коэффициента условий работы  $m < 1$ . Как показывают экспериментальные исследования, проведенные К. П. Большаковым на сварных образцах из низколегированной стали, хрупкие разрывы при  $t = -60^\circ\text{C}$  наступали после значительной пластической деформации, при этом минимальные значения предела прочности не падали ниже уровня, полученного при  $t = +20^\circ\text{C}$ . Относительное удлинение образцов  $\delta_b$  не было ниже 5,3 %. Таким образом, пластические свойства низколегированной стали сохраняются и при пониженной температуре, несмотря на наличие концентраторов напряжений типа фасонки узлов главных ферм и связей.

Увеличение скорости нагружения ведет к повышению предела текучести. Например, для низкоуглеродистой стали увеличение скорости деформирования почти в 1000 раз (от  $9,5 \cdot 10^{-7}$  до  $8,5 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ ) вызывает увеличение нижнего предела текучести от 190 до 214 МПа [32]. При большей из этих скоростей деформации для достижения текучести требовалось около 1 с. С другой стороны медленное нагружение, по данным исследований ЦНИИСК имени В. А. Кучеренко, снижает предел текучести на 15%, однако это в мостовых конструкциях не наблюдается.

Механическое старение выражается в том, что после появления пластических деформаций по истечении значительного промежутка времени предел упругости повышается. Это тоже не имеет существенного значения для металлических мостов, так как допускаемые пластические деформации весьма малы, а их появление возможно лишь при чрезмерных обстоятельствах.

Форма сечения образцов при испытаниях влияет на значение предела текучести и временного сопротивления. По исследованиям ЦНИИСК имени Кучеренко, для круглых образцов эти характеристики выше на 10—15% по сравнению с прямоугольными образцами. Сечения элементов мостов в подавляющем большинстве состоят из листовых деталей, однако и стандартные испытания проводят, как правило, на плоских образцах.

Для определения условий перехода в пластическое состояние применяют те или иные условия пластичности. Наиболее широкое распространение получил энергетический критерий («энергетическая теория прочности»), который хорошо подтверждается для сталей повышенной и высокой прочности. Исследования ЦНИИСК имени В. А. Кучеренко показывают, что для низкоуглеродистых сталей более правильной оказывается теория касательных напряжений, но в то же время другими исследованиями подтверждается энергетическая теория.

Используя энергетический критерий пластичности, будем иметь в виду, что в рамках предлагаемых расчетов нет препятствий использовать и иные условия пластичности.

Обоснование допустимой пластической деформации в предельном состоянии значительно упрощается, если металл не подвергался пластическому деформированию в процессе изготовления конструкций и монтажа.

При проходе по сооружению тяжелой нагрузки, превышающей нормативную, возможно возникновение пластической деформации  $\varepsilon_{p, \max} \leq 0,25\%$  и остаточных напряжений после разгрузки. Дальнейшая эксплуатация рассматриваемого элемента будет проходить при наличии остаточных напряжений и остаточных деформаций, которые не должны снижать надежность конструкции. В противном случае они должны быть уменьшены до безопасного уровня. В реальных же конструкциях пластические деформации уже имеются в элементах до приложения к ним нагрузок, а при воздействии последних (даже не превышающих нормативных) тоже возникают пластические деформации. Объясняется это тем, что при прокатке, правке (холодной и термической), сварке и других операциях в элементах возникают как остаточные деформации, так и остаточные напряжения, причем последние в зонах сварных швов достигают уровня предела текучести (растягивающие напряжения) и, следовательно, приложение внешней нагрузки сразу же ведет к появлению пластических деформаций в определенных зонах сечения. Например, при сварке элементов продольным швом в зоне последнего по всей длине вследствие нагрева и плавления металла остаются пластические деформации растяжения, достигающие примерно  $2\varepsilon_T$  для малоуглеродистых сталей. Кроме того, в поперечном сечении возникают упругие самоуравновешенные остаточные напряжения и упругие деформации. В околошовной зоне остаточные напряжения растяжения достигают предела текучести.

Таким образом, в сварных элементах после их изготовления в ограниченной по площади сечения области возникают как пластические деформации, так и остаточные (упругие) напряжения.

Приложение внешней нагрузки к элементу с продольными сварными швами вызывает перераспределение и уменьшение остаточных напряжений, а также изменение пластической деформации в зоне шва. Рассмотрим элемент прямоугольного сечения, образованный сваркой узких полос (рис. 1.7). При приложении растягиваю-



щего напряжения  $\sigma = P/F$  возникает новая пластическая деформация элемента [37]:

$$\varepsilon_p = \frac{\sigma}{E} \left( \frac{1}{1-\alpha} - 1 \right)$$

при  $\alpha = F_T/F$ ,  $F_T = b_T \delta$ ,  $F = B\delta$ .

Например, при  $\sigma = \sigma_T$  и  $\alpha = 0,1$  имеем  $\varepsilon_p = 0,11 \varepsilon_T$  (незначительные), а остаточные напряжения  $\sigma'_1 = (1 - \sigma/\sigma_T) \sigma_1$  и  $\sigma_2 = (1 - \sigma/\sigma_T) \sigma_2$  после разгрузки равны нулю.

Приложение сжимающей силы  $P$  вызывает пластические деформации в случае  $P > P_{упр} = F\sigma_T [1 - \alpha (1 - \alpha)]$ . Пластическая деформация при этом

$$\varepsilon_p = -\frac{\sigma}{E} \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right) - \varepsilon_T \left( 1 - \frac{\alpha}{1-\alpha} \right) \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right).$$

При  $\sigma = \sigma_T$  и  $\alpha = 0,1$  имеем  $\varepsilon_p = -1,1 \varepsilon_T$ .

В рассмотренных примерах взяты крайние значения величин  $\sigma$  и  $\alpha$ , но, тем не менее, полученные результаты дают возможность оценить деформированное состояние сварных элементов.

Для мостовых конструкций большое значение имеют остаточные напряжения от сварки. Эти напряжения возникают всегда, даже когда свариваемый элемент свободен от закреплений; они локализуются около сварного шва и называются сварочными напряжениями (см. рис. 1.7). Их значение вдоль шва может достигать значения предела текучести на растяжение.

Для определения распределения остаточных напряжений имеются соответствующие методы [37]. Так, при сварке двух полос встык имеем

$$\sigma_2 = \sigma_T \frac{F_T}{F - F_T} \text{ при } F_T = b_T \delta, F = B\delta.$$

Величина  $b_T$  зависит от способа (режима) сварки и определяется по известным формулам.

Если свариваемый элемент закреплен, то наряду со сварочными напряжениями в зоне шва возникают реактивные, захватывающие значительные области элемента. Необходимо стремиться к уменьшению реактивных напряжений. Серьезное значение имеет также то обстоятельство, что неблагоприятное закрепление элемента может привести к образованию трещин во время сварки или после ее окончания.

Остаточные напряжения влияют на прочность, в большинстве случаев снижая нагрузку, при которой появляются пластические деформации.

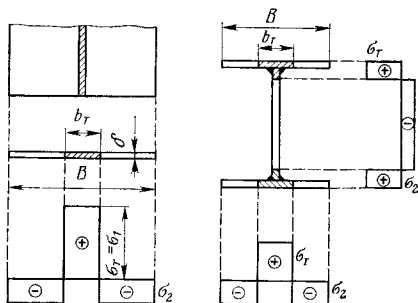


Рис. 1.7. Эпюры остаточных напряжений в сварных прямоугольном и двутавровом элементах

ции. Однако конечное значение прогиба при полном развитии пластичности (текучести) не меняется. Остаточные напряжения влияют на прогиб при статическом нагружении только при ограниченных пластических деформациях. Эти обстоятельства поддаются теоретическому анализу. С другой стороны, остаточные напряжения не оказывают влияния на предельную нагрузку отдельного элемента при вязком разрушении после развития достаточно большой пластической деформации. Что касается влияния остаточных напряжений на хрупкую прочность, то здесь хрупкое разрушение в пластичных материалах может вызываться только трехосными остаточными напряжениями. В реальных конструкциях трехосность напряжений носит локальный характер и не может существенно повлиять на общую прочность. Исключение составляет случай, когда материал работает в ударно-хрупких условиях, например при низкой температуре и наличии концентратора напряжений; при этом хрупкое разрушение может наступить как при наличии, так и отсутствии остаточных напряжений.

В стальных конструкциях обеспеченность от хрупкого разрушения в различных условиях температур, скорости нагружения и других факторов достигается заданным размером ударной вязкости стали, уровнем расчетного сопротивления, соблюдением конструктивных требований, а также качеством изготовления (размером повреждений).

Рассматривая влияние остаточных напряжений на прочность конструкций, необходимо предварительно сделать следующее замечание.

Как уже упоминалось, в сварных пролетных строениях в зонах шва остаточные напряжения растяжения достигают предела текучести материала. При приложении нагрузки в самом начале эксплуатации сооружения появляются пластические деформации, ограниченные по площади сечения, но распространяющиеся на всю длину элемента, например растянутого раскоса фермы. Общие остаточные прогибы конструкции появляются, как правило, только под испытательной нагрузкой, а при эксплуатации нарастания остаточных деформаций не происходит. Это служит косвенным доказательством приспособляемости мостовых конструкций под подвижными нагрузками в случае, когда остаточные деформации ограничены по размеру. При этом диапазон классов прочности сталей весьма широк.

Хотя при нормативных нагрузках появление пластических деформаций не допускается, все же возможно  $n$ -кратное воздействие тяжелых нагрузок и соответственно ограниченное развитие пластических деформаций. В этих условиях нужно обеспечивать затухание дополнительных перемещений (за счет пластических деформаций) после некоторого числа повторных приложений нагрузки, т. е. речь идет о приспособляемости конструкции к воздействию тяжелых нагрузок с переходом в упругую стадию работы, при которой разрушение может вызываться только усталостью материала.

Необходимо различать физическую и конструктивную приспособляемость. Физическая приспособляемость связана со свойствами материала и характеризуется тем, что пластические характеристики или не зависят от числа циклов нагружения (циклически идеальный материал) или же после  $n$  циклов не возникает дополнительных пластических деформаций (циклически упрочняющийся материал). Конструктивная приспособляемость связана с особенностями конструкции и характером (последовательностью) приложения нагрузки.

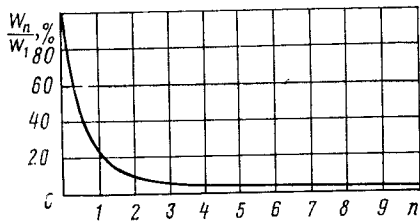


Рис. 1.8. Экспериментальная кривая приспособляемости

Для сплошной среды теоретически доказано [30], что при циклически идеальном материале в случае простого нагружения, когда внешние силы изменяются пропорционально одному общему параметру, повторение цикла нагрузок приводит к повторению напряженного и деформированного состояний, а рост перемещений наблюдаться не будет. Данный случай можно отнести к нагружению статически определимых конструкций при ограниченном развитии пластических деформаций. Например, для однопролетной изгибаемой балки повторение цикла нагрузок не должно вызывать роста прогибов. Учитывая, что строительные стали с площадкой текучести близки по своим свойствам к циклически идеальному материалу, в экспериментальных исследованиях должно наблюдаться быстрое затухание приращений прогибов при повторных нагружениях. Это подтверждает график (рис. 1.8), на котором по оси абсцисс отложено число  $n$  повторений приложений нагрузки, а по оси ординат — отношение прогиба при  $n$ -м нагружении к прогибу при первом нагружении. Этот результат получил Л. П. Шелестенко во ВНИИ транспортного строительства при испытании двутавровых клепаных балок пролетом 3,2 м и высотой 0,60 м [72]. Балки были изготовлены из стали марки Ст. 3 мост.

Данный вывод о приспособляемости статически определимых балок можно распространить на материалы, обладающие упрочнением, но циклически идеальные. Математическое выражение приспособляемости статически неопределимых систем связано с теоремой Блейха—Мелана [21, 30] для сплошной среды без упрочнения. Содержание этой теоремы следующее.

Пусть под воздействием внешних сил в конструкции из идеально пластического материала возникли напряжения  $\sigma_{ij}$  и деформации  $\epsilon_{ij}$ . Если не появились вторичные пластические деформации, то остаточные напряжения после разгрузки:

$$\sigma_{ij, \text{ост}} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij, \text{упр}}; \epsilon_{ij, \text{ост}} = \epsilon_{ij} - \epsilon_{ij, \text{упр}}.$$

Состояние приспособляемости существует, если может быть найдена такая система остаточных (самоуравновешенных) напряжений  $\sigma_{ij, \text{ост}}$ , при которой  $\sigma_{ij, \text{прис}}^* = \sigma_{ij, \text{ост}} + \sigma_{ij, \text{упр}} \leq \sigma_1$ , т. е. система приспособится к некоторому упругому состоянию. Для определения приспособляемости под заданными нагрузками достаточно найти какое-либо состояние приспособляемости. Теорема не дает ответа: после какого числа циклов наступит приспособляемость и, следовательно, остаются неизвестными окончательные пластические деформации. С другой стороны, теорема Блейха—Мелана дает возможность определить нижние границы допускаемых циклических нагрузок. Теорема Койтера [21], которая рассматривает скорость пластических деформаций, устанавливает верхние границы допустимых циклических нагрузок.

В случаях, если все внешние силы зависят только от одного параметра, для диаграммы с упрочнением в о з м о ж н о п р я м о е р е ш е н и е задачи о приспособляемости внешне статически определимых систем, частный случай которых выше уже рассмотрен. Пусть внешние силы  $P$  возрастают пропорционально  $k$ . Перед началом разгрузки обозначим этот параметр через  $k^I$ , а после разгрузки и нагружения усилием с обратным знаком —  $k^{II}$ ; условием приспособляемости в этом случае будет отсутствие пластических деформаций после полной разгрузки и при последующем нагружении силами обратного знака [30]

$$k^{II} > k^I - f(\beta \sigma_T) \quad \text{или} \quad k^I - f(\beta \sigma_T) \leq k \leq k^I,$$

где  $f$  — функция, определяемая диаграммой деформирования конструкций в упругой стадии;  $\beta$  — коэффициент, характеризующий пластические свойства материала при циклическом деформировании (для циклически идеального материала  $\beta = 2$ ).

Когда внешние силы не меняют знака и допускают полную разгрузку, условие приспособляемости имеет вид  $k^I \leq f(\beta \sigma_T)$ . Пластические деформации при этом определяются их значениями при первом нагружении.

Определим диапазон изменения нагрузки при совместном изгибе и растяжении бруса прямоугольного сечения высотой  $H$  и ограниченном развитии пластичности в сечении, полагая  $\beta = 2$ . Диаграмма материала имеет упрочнение. Изгибающий момент, выраженный через осевую силу,  $M = kP$ . Пластические деформации начинают развиваться при

$$P = P_T = \frac{\sigma_T F}{1 + kHF/(2J)},$$

где  $F, J$  — площадь и момент инерции поперечного сечения.

Если при первом нагружении осевая сила достигла значения  $P^I$  по условиям прочности, то значение приспособляющей нагрузки  $P$  заключено в пределах [30]:

$$P^I \cdot \frac{2\sigma_T F}{1 + kHF/(2J)} \leq P \leq P^I.$$

Таким образом, сами по себе остаточные напряжения не служат препятствием для расчетов по ограниченным пластическим деформациям, однако в тех случаях, когда их роль отрицательна, это необходимо учитывать в той или иной форме.

Следовательно, в общем комплексе факторов пластические деформации ограниченного размера не могут снизить надежность мостовых конструкций как в стадии эксплуатации, так и предельном состоянии.

## **2. ОСОБЕННОСТИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ РАСЧЕТОВ КОНСТРУКЦИЙ**

### **2.1. КОНСТРУКТИВНЫЕ ФОРМЫ МОСТОВ И РОЛЬ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ РАСЧЕТОВ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ**

Характерными чертами мостостроения в области стальных пролетных строений являются: 1) применение сталей классов прочности до С54/40 включительно (а в перспективе до С70/60 и выше), что ведет к уменьшению массы и использованию тонкостенных элементов; 2) широкое применение сварки на заводах (сварные заводские элементы) и использование на монтаже высокопрочных болтов, а в некоторых случаях и сварки; 3) создание пролетных строений, в которых все элементы работают совместно, как единое целое; 4) применение коробчатых сечений элементов, обладающих рядом преимуществ; 5) навесной монтаж, а также надвижка пролетных строений с использованием особенностей конструкций; 6) постепенное внедрение эффективных вантово-балочных систем, имеющих как технико-экономические, так и архитектурные преимущества.

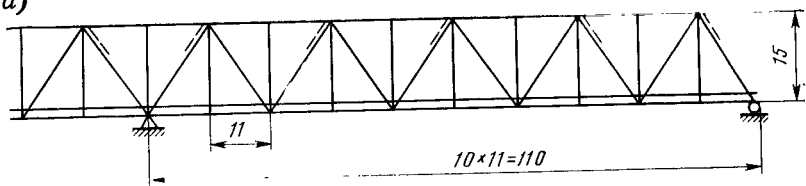
Конструктивные формы стальных и сталежелезобетонных железнодорожных пролетных строений характеризуются следующими особенностями.

В сквозных пролетных строениях разрезной и неразрезной систем (рис. 2.1) конструкция проезжей части включается в совместную работу с главными фермами посредством специальных диафрагм, что устраняет разрывы продольных балок и создает более надежную и жесткую конструкцию. В типовых неразрезных железнодорожных пролетных строениях  $2 \times 110$  м,  $2 \times 132$  м,  $110+132+110$  м и  $132+154+132$  м, запроектированных Гипротрансмостом как для обычного, так и северного исполнения, и рассчитанных по излагаемому автором методу, включение проезжей части в совместную работу с фермами позволило применить сталь классов С50/35 и С54/40 и одновременно удовлетворить требованиям жесткости по прогибам, а также плавности движения подвижного состава вследствие ликвидации разрывов в элементах проезда. Пролетные строения такой серии широко применяются на БАМе.

Специально для условий строительства БАМа и Мирного в том предложены аналогичные пролетные строения с одной или двумя (см. рис. 2.1, б)

Сталежелезобетонные пролетные строения длиной до 110 м для железной дороги (рис. 2.2) в основном применяют разрезные системы, причем в уровне нижних поясов устраивают продольные крестовые системы или же ребристую плиту. В последнем случае верхняя железобетонная плита, вертикальные стенки и торцевая стальная плита образуют коробчатое сечение, неизменяемость которого достигается постоянкой поперечных связей. Вообще такие пролетные строения имеют достаточно высокую жесткость на кручение и правильное использование этого обстоятельства (в том числе продольных связей при кручении) может дать существенный технико-экономический эффект. Поскольку коробчатые конструкции мало чувствительны к эксцентрично приложенным нагрузкам, вызывающим появление дополнительных нормальных напряжений, для таких пролетных строений можно не учитывать перегрузку из-за смещений пути и центра тяжести груза. Дополнительные касательные напряжения при этом незначительные и их максимальные значения наблюдаются в приопорных зонах.

а)



$40 \times 5,5 = 220$



б)  $10 \times 5,5 = 55$

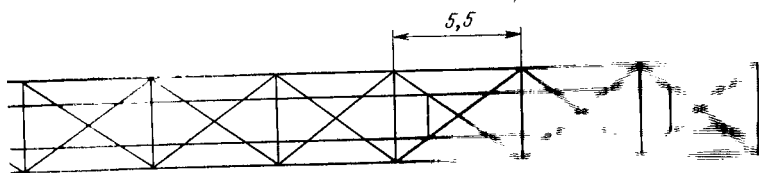
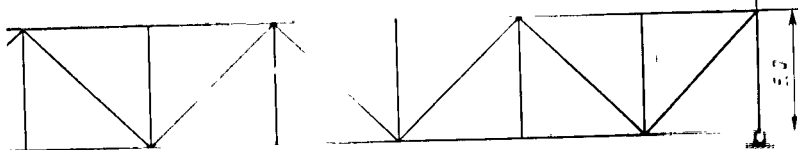


Рис. 2.1. Сквозные пролетные строения для железной дороги  
а — с одной опорой; б — с двумя опорами

Рис. 2.2. Поперечное сечение сталежелезобетонного пролетного строения под железную дорогу

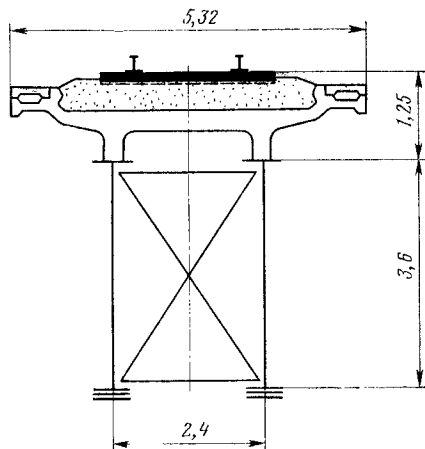
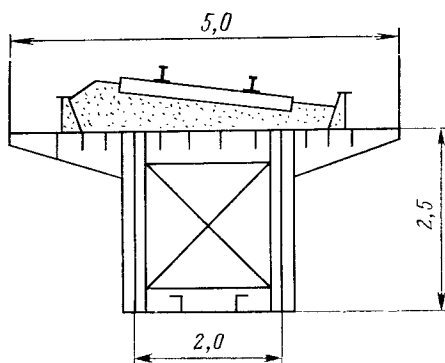
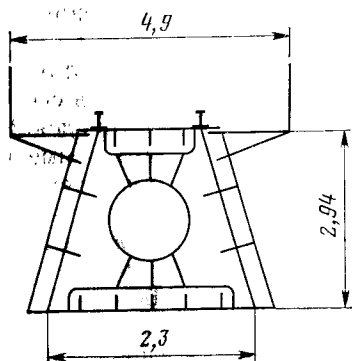


Рис. 2.3. Поперечные сечения коробчатых пролетных строений под железную дорогу



Наметилась тенденция применения цельносварных коробчатых пролетных строений для капитальных мостов. Рельсы в таких конструкциях прикрепляют непосредственно к верхней стальной ортотропной плите (рис. 2.3), что позволяет отказаться от балласта, снизить массу пролетных строений, а также монтировать их в любое время года. Подобные пролетные строения имеют большую перспективу в случае использования для них сталей типа «кортен», не требующих окраски. При этом возможно устройство езды и на балласте. Коробчатые пролетные строения эффективны при расположении их на кривых участках трассы, так как нормальные напряжения от перегрузки не имеют практического значения, а касательные — легко воспринимаются без увеличения сечений.

Конструктивные формы автодорожных пролетных строений также характеризуются рядом особенностей.

В первую очередь, следует отметить разрезные и неразрезные сталежелезобетонные пролетные строения со сплошной стенкой, как правило, двухбалочные, а в городских условиях — многобалочные.

В этих пролетных строениях важное значение имеет учет распределения усилий между балками, в том числе влияние продольных связей на пространственную работу пролетных строений. Для массивной сталежелезобетонной конструкции Литейного моста в Ленинграде были выполнены пространственные расчеты, позволившие Ленгипротрансмосту более рационально запроектировать конструкцию пролетного строения, а также обеспечить безопасные методы монтажа при укладке железобетонных плит. Аналогичный эффект был получен в пролетных строениях, запроектированных Харгипротрансом, из сталежелезобетона через шлюзы Саратовской ГЭС.

Учет работы продольных связей, например, в двухбалочных конструкциях, может эффективно быть использован при эксцентричном приложении нагрузки. Расчет типового неразрезного пролетного строения, разработанного Ленгипротрансмостом в 1976 г., из сталежелезобетона по схеме  $42+63+42$  м показал, что продольные связи эффективно включаются при работе на кручение. По данным Ленгипротрансмоста, такой расчет дает в отдельных случаях экономию стали до 10%.

В рассматриваемых пролетных строениях иногда используют объединение нижних поясов балок ребристой плитой, особенно в сечениях с большими изгибающими моментами. Например, городской мост неразрезной системы в Москве через канал в Химках имеет две коробчатые балки. Мост через р. Обь (рис. 2.4) аналогичен по конструкции, причем железобетонная плита при толщинах порядка 20—30 см имеет пролет 7 м. Для такого пролетного строения при расчете плиты необходимо учитывать все факторы, влияющие на ее работу, так как от этого зависит расход арматуры и бетона. Расчет пролетного строения с определением усилий в железобетонной плите позволил добиться минимального расхода поперечной и продольной арматуры.

Большой интерес представляют балочные неразрезные пролетные строения коробчатого сечения с ортотропными плитами. К ним относятся, например, пролетные строения моста через р. Ангару (рис. 2.5) проектировки Гипротрансмоста. Расчет таких пролетных строений содержит решение целого комплекса задач, к которым относятся работа на кручение, неравномерность распределения напряжений по ширине пролетного строения, расчет ортотропной плиты с учетом ее защемления главными балками и др.

Близки по своим характеристикам к рассмотренным пролетным строениям вантово-балочные мосты (рис. 2.6). Круг вопросов, решаемых пространственными расчетами, здесь еще более широк и пока не существует таких программ для ЭВМ, чтобы из расчета по ним можно было бы определить все необходимые факторы. Поэтому для расчетов вантово-балочного пролетного строения моста через р. Днепр пользовались комплексом программ, как для расчета стержневых систем, так и плитно-балочных конструкций. Например, пространственный расчет вантово-балочного пролетного строе-



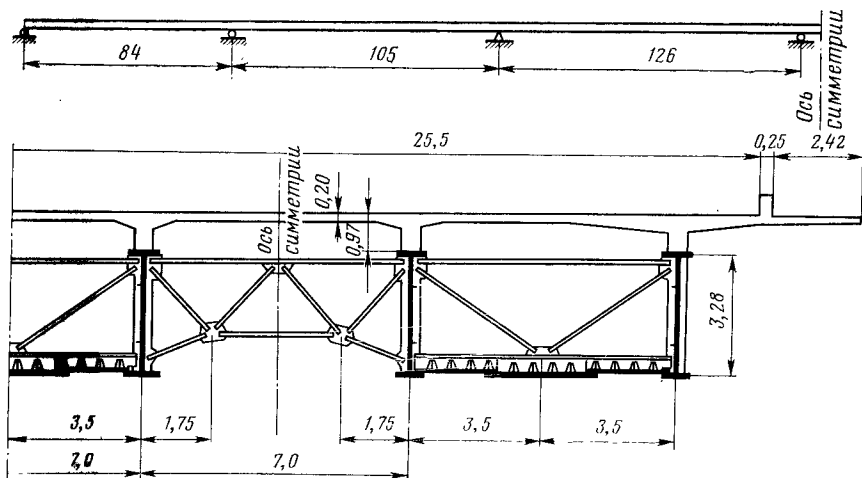


Рис. 2.4. Схема и поперечный разрез сталежелезобетонного пролетного строения городского моста

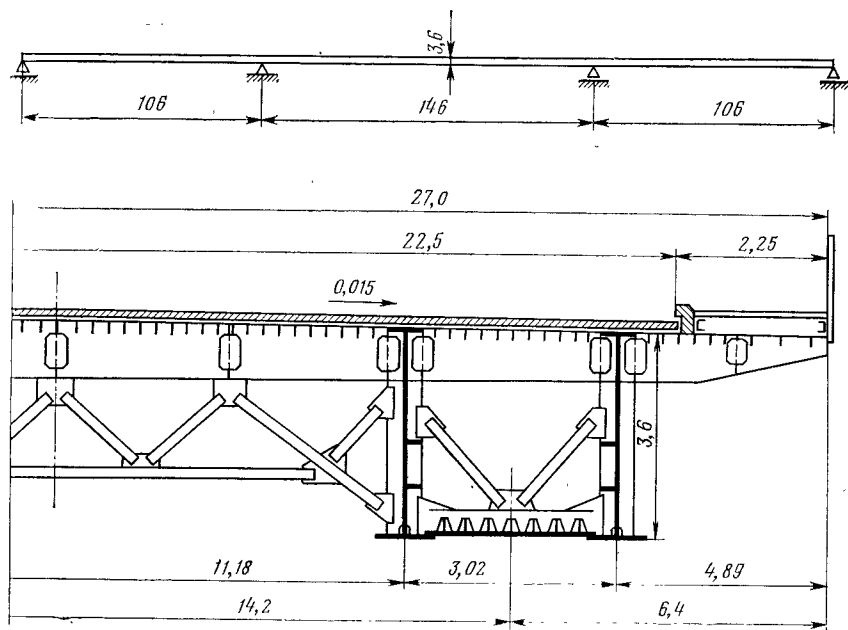


Рис. 2.5. Схема и поперечный разрез стального пролетного строения с ортотропной плитой городского моста

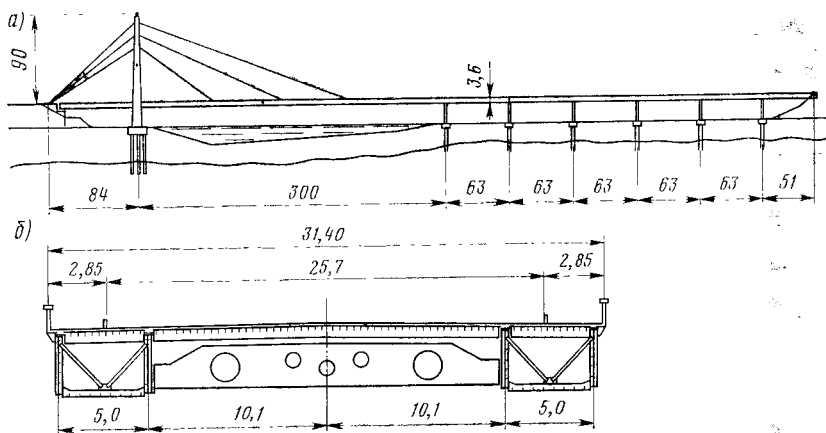


Рис. 2.6. Схема и поперечный разрез городского вантово-балочного моста

ния с главным пролетом 300 м выполнялся по программе ПС-1, а учет неравномерности распределения напряжений по ширине пролетного строения и местных напряжений в узлах крепления вант — по программе МП-4. Это позволило Киевскому филиалу Союздорпроекта учесть при проектировании все отмеченные обстоятельства.

Таким образом, для рассмотренных систем характерна совместная работа всех элементов пролетного строения, как единого целого, и, следовательно, расчеты должны учитывать эти условия. Иными словами, расчеты должны быть пространственными и ориентированы на использование ЭВМ. Упрощенные варианты таких расчетов должны отражать главные факторы пространственной работы как для условий эксплуатации, так и монтажа. Кроме того, в зависимости от вида предельного состояния в расчетах предполагается или упругая работа материала от нормативных нагрузок, или упругопластическая от расчетных нагрузок.

Правильный учет распределения усилий между элементами пространственной конструкции также важен для расчетов на устойчивость и выносливость.

## 2.2. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ПО СХЕМАМ И МЕТОДАМ РАСЧЕТА

Любую мостовую конструкцию можно рассматривать как состоящую из отдельных элементов. Ими могут быть: 1) стержни (сплошные или тонкостенные, в частном случае — нить) — дискретные элементы, у которых одно измерение (длина) значительно больше двух других; 2) пластины (оболочки) — континуальные элементы, у которых два измерения (длина и ширина) значительно превышают толщину; 3) массивные тела — континуальные элементы, у которых все три измерения имеют одинаковый порядок. Стержни рассчитывают методами строительной механики, а конти-

нуальные элементы — методами теории упругости. Однако и для расчета континуальных элементов могут быть использованы методы строительной механики стержневых систем (дискретные расчетные схемы).

В соответствии с принятой классификацией элементов, конструкции мостов могут быть разделены на с и с т е м ы континуальные, стержневые (дискретные) и дискретно-континуальные. Эти системы можно рассчитывать по различным расчетным схемам. Например, некоторые стержневые системы могут быть рассчитаны по континуальным расчетным схемам, а континуальные в сложных случаях — по дискретным (стержневым).

Иногда расчетная схема может соответствовать реальной схеме конструкции. Это определяется их конкретными особенностями.

Выбор расчетной схемы для пролетных строений мостов — очень важная задача и часто для этого требуются специальные теоретические и экспериментальные исследования.

С появлением ЭВМ расчетные схемы стали более сложными, уточненными, приближающимися по своим свойствам к реальным конструкциям. Большое распространение получили дискретные расчетные схемы, которые позволяют использовать хорошо разработанный аппарат строительной механики и ЭВМ.

В общей проблеме расчета конструкций пролетных строений мостов целесообразно рассмотреть к л а с с и ф и к а ц и ю возникающих задач. Учитывая, что в случае активного процесса нагружения задачи нелинейной теории упругости и теории пластичности идентичны, их можно классифицировать по В. В. Новожилову [34]: 1) линейные физически и геометрически; 2) нелинейные физически, линейные геометрически; 3) линейные физически, нелинейные геометрически; 4) нелинейные физически и геометрически. Первый класс задач относится к жестким конструкциям, элементы которых следуют закону Гука. Методы расчета таких конструкций известны как классические методы строительной механики и теории упругости, которые рассматривают малые деформации. Второй класс задач относится к жестким стержням, пластинам и оболочкам при нелинейных зависимостях между напряжениями и деформациями. В частности, классическая теория пластичности решает задачи данного типа. Если соблюдается закон Гука, то этот класс задач переходит в первый. Третий класс задач относится к тонким стержням, пластинам и оболочкам при соблюдении закона Гука между деформациями и напряжениями. Основное отличие от задач первого класса заключается в учете углов поворота в уравнениях между деформациями и перемещениями. В свою очередь, первый класс может быть получен из третьего, если предположить, что удлинения и сдвиги пренебрежимо малы по сравнению с единицей, а квадраты углов поворота пренебрежимо малы по сравнению с удлинениями и сдвигами. Четвертый класс задач рассматривает гибкие стержни, пластины и оболочки при нелинейных зависимостях между напряжениями и деформациями.

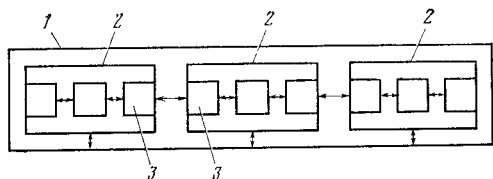


Рис. 2.7. Сложная конструкция, разделенная на блоки:

1 — целая конструкция; 2 — блок; 3 — подблок

Рассмотрим первый и второй классы задач, так как они в наибольшей степени отвечают работе мостовых конструкций в предельных состояниях. Учет геометрической нелинейности необходим в тонких листовых конструкциях, а также вантовых и висячих мостах больших пролетов.

Статически (кинематически) неопределимые системы чаще всего рассчитывают по методу сил или методу перемещений. Неизвестные силы (перемещения) представляют в виде обобщенных групповых факторов.

При использовании метода сил для расчета сложных мостовых конструкций последние можно расчлнить на ряд основных частей (блоков), связанных между собой статически неопределимо (рис. 2.7). Причем каждая часть (или блок) — тоже статически неопределимая система.

В соответствии с этим статически неопределимые неизвестные могут быть представлены в виде следующих групп: основные (главные) неизвестные  $X_i$  (рис. 2.8, а); дополнительные (вспомогательные) неизвестные  $\bar{X}_i$  (рис. 2.8, б); местные (третичные) неизвестные  $\overset{\infty}{X}_i$  (рис. 2.8, в).

Конечно, возможен подход к расчету моста и без деления на блоки, но это далеко не всегда осуществимо, особенно при пространственном расчете. Иногда оказывается достаточным использовать только блоки без их деления на подблоки. Это определяется конструкцией отдельных элементов (балок), а также требуемой точностью расчета. Данный прием применен автором для расчета сквозных пролетных строений.

По существу введение подблоков определяет расчет на местные воздействия.

Необходимо отметить, что расчетные схемы подблоков, блоков, а также всей конструкции различны по своей точности. Введение

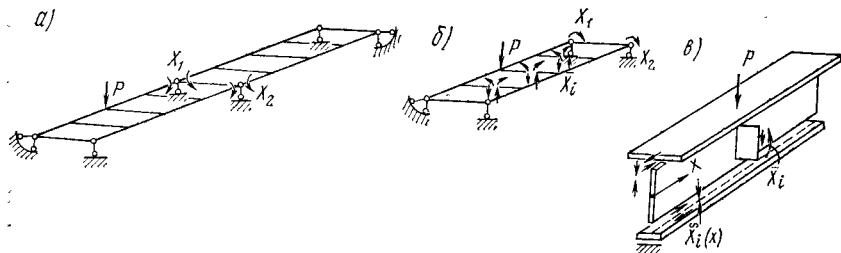


Рис. 2.8. Неизвестные в методе сил при расчете сложных конструкций:

а — целая конструкция; б — блок; в — подблок

блоков улучшает обусловленность системы алгебраических уравнений, что немаловажно при высокой степени статической неопределенности. Введение же всех разрезов сразу может привести к потере точности вычислений из-за большой податливости такой системы.

Сложные конструкции удобно рассчитывать по методу перемещений. При этом расчетная схема может не соответствовать методу сил, так как выбор метода расчета может несколько изменять расчетную схему с точки зрения удобства использования того или иного метода. Возможно также применение кинематически неопределимой основной системы с введением кинематически неопределимых блоков.

Для расчета сложных систем на ЭВМ иногда может оказаться полезным метод регуляризации конструкции. При этом данную систему преобразуют в регулярную конструкцию добавлением недостающих элементов (создание топологически регулярной конструкции). Для перехода к реальной конструкции жесткости тех или иных элементов можно взять нулевыми, или элементы выключить из работы.

При расчете конструкций в нелинейной области их работы следует различать нелинейность двух типов: связанную непосредственно со свойствами диаграммы деформирования; возникающую при больших прогибах, которые существенно изменяют геометрические параметры конструкции. Методы учета физической нелинейности основаны на сведении нелинейной задачи к последовательности линейно-упругих задач.

Геометрическую нелинейность в методе сил [1] можно учесть путем введения фиктивных внешних нагрузок и начальных деформаций, применяемых для выполнения условий равновесия и уточнения условий совместности деформаций. Расчет такой конструкции по-прежнему основывается на геометрических параметрах недеформированного состояния. Фиктивные внешние нагрузки и начальные деформации служат при этом нелинейными функциями перемещений и решение возможно при использовании метода итераций.

В методе перемещений учет геометрической нелинейности сводится к учету влияния перемещений на условия равновесия. Задачу учета геометрической нелинейности в этом случае можно свести к обычной с измененными жесткостями, зависящими линейно от внутренних усилий, возникающих в элементах в течение всей предыдущей последовательности наружения. Метод последовательных приближений может быть использован в двух вариантах: 1) силы получают на каждом шаге малые приращения; геометрические жесткости на каждом шаге определяются заново, а соответствующие приращения перемещений находятся путем обычного метода перемещений при условии, что берется измененная жесткость; 2) учитывают сразу всю нагрузку и вычисляют по полученным перемещениям новые значения жесткостей; жесткости в данном приближении  $i$  вычисляют по перемещениям, найденным в  $i - 1$ , приближении. На первом шаге не учитывают влияние геометрической нелинейности.

### 2.3. УЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ РАБОТЫ СООРУЖЕНИЙ

Конструкции стальных пролетных строений являются пространственными системами, и естественным было во все времена мостостроения стремление учесть это обстоятельство при проектировании. Однако возможности такого учета ограничивались часто трудностями вычислительного характера. В настоящее время теория сооружений располагает широким арсеналом средств для расчета пространственных систем. Рассмотрим особенности и принципы расчета при использовании тех или иных теорий и методов в линейной постановке.

Классическая теория стержневых систем в канонической форме весьма эффективна, широко применяется на практике. Имеются как универсальные программы к ЭВМ, так и программы для определенных, частных классов конструкций. Роль последних остается значительной как по простоте пользования и меньших затрат машинного времени, так и по условиям их применения в системе автоматизированного проектирования. Основные дифференциальные зависимости линейной теории стержневых систем следующие.

При растяжении (сжатии) относительная деформация связана с осевой силой:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{N}{EF}. \quad (2.1)$$

Изгиб в одной из главных плоскостей

$$v'' \text{ (или } w'') \approx 1/\rho = -M/(EJ). \quad (2.2)$$

Для кручения в классической теории используется зависимость между углом закручивания и крутящим моментом:

$$\frac{d\Phi}{dx} = -\frac{M_K}{GJ_K}. \quad (2.3)$$

Эти зависимости приводят к шести силовым факторам в сечении стержня:  $N$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $Q_x$ ,  $Q_y$ ,  $M_K$ .

С другой стороны, напряженное состояние стержня будет определено полностью, если известны перемещения его концов — три линейных и три угловых на каждом конце. Выбор расчетной схемы и основной системы — ответственная задача, она определяется особенностями сооружения.

Классическая теория стержневых систем позволяет рассмотреть расчет практически любых конструкций по дискретным расчетным схемам. При этом ряде случаев, например для сквозных пролетных строений, эта теория достаточно точна.

Теория тонкостенных стержней-оболочек с жестким контуром поперечного сечения широко используется в мостостроении. Здесь необходимо выделить три типа сечений, для которых теория имеет свои особенности. Наиболее четко обоснована эта теория для

открытого контура, описываемая уравнением стесненного кручения:

$$EJ_{\omega} \Phi^{IV}(z) - GJ_R \Phi'(z) = -m(z), \quad (2.4)$$

а также теория тонкостенных стержней замкнутого контура, описываемая уравнением:

$$\begin{aligned} \Phi^{IV}(z) - k^2 \Phi''(z) &= -\frac{\mu m(z)}{EJ_{\omega}} + \frac{m''(z)}{GJ_R}, \text{ при } k = \\ &= \sqrt{\frac{\mu GJ_R}{EJ_{\omega}}}, \quad \mu = 1 - \frac{J_R}{J_c}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где  $J_c$  — направленный полярный момент инерции сечения.

Между двумя типами стержней открытого и замкнутого контура лежит широкий класс конструкций смешанного типа, например, открытый контур, усиленный связями, или система коробчатых сечений, связанных между собой плитой в одном (верхнем) уровне. Универсальная теория таких стержней отсутствует, видимо, по причине сложного описания деформации при кручении стержней со смешанным сечением. Практически для таких типов сечений можно использовать одно из уравнений (2.4) или (2.5), при этом погрешность решения остается неустановленной (в пределах различия перечисленных теорий).

Теория тонкостенных стержней позволяет эффективно и достаточно просто рассчитать сложные системы мостов (неразрезные, вантово-балочные) и получать при этом удовлетворительные результаты. Однако следует отметить невозможность по этому методу учета деформаций контура поперечного сечения и неравномерности распределения напряжений по ширине поперечного сечения при симметричной нагрузке. В сравнении с классической теорией в сечениях тонкостенного стержня учитывают дополнительные силовые факторы для открытого (замкнутого) профиля:

бимомент

$$B_{\omega} = -EJ_{\omega} \Phi''(z) \text{ или } B_{\omega} = -\frac{EJ_{\omega}}{\mu} \Phi''(z) + \frac{EJ_{\omega}}{\mu GJ_c} m;$$

изгибно-крутящий момент

$$M_{\omega} = -EJ_{\omega} \Phi'''(z) \text{ или } M_{\omega} = -\frac{EJ_{\omega}}{\mu} \Phi'''(z) + \frac{EJ_{\omega}}{\mu GJ_c} m'.$$

Дополнительный (седьмой) кинематический фактор сечения — деформация  $\theta = \Phi'(z)$  для открытых типов сечений и мера деформации для замкнутых  $\beta = \Phi'(z)/\mu - M_R/(\mu GJ_c)$ .

Таким образом, учет пространственной работы по теории тонкостенных стержней приводит к дополнительным нормальным и касательным напряжениям, действующим в сечении. Это результат стесненного (изгибного) кручения стержней.

Теория плитно-балочных конструкций (складчатых оболочек) базируется на решениях прикладной теории упругости, в частности пластинок. Теория позволяет достаточно полно выявить работу всех элементов пролетного строения — главных балок, плит, стенок балок и др. Однако эта теория не лишена недостатков — трудности учета переменного сечения по длине, граничных условий в сложных системах.

Метод конечных элементов получил достаточно широкое распространение в последние 10—15 лет благодаря своей универсальности. Это численный метод, основанный на условном разделении упругого тела (конструкции) на ряд элементов, решение для которых имеет простую форму, а в ряде случаев элементарно. Объединяются элементы в узлах, в которых полностью удовлетворяются условия неразрывности перемещений и условия равновесия.

Рассмотрим конечный элемент прямоугольной формы при плоском напряженном состоянии и изгибе для расчета системы, состоящей из множества таких элементов [60].

Перемещения точек прямоугольного элемента в его плоскости при плоском напряженном состоянии для ортотропной пластины может быть задано в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{E_x} (2f_4 x + 6f_5 xy) - \frac{\mu x}{E_y} (3f_1 x^2 + 2f_2 x) + f_7 y - \\ &\quad - \frac{3}{E_y} f_1 y^2 + f_8; \\ v(x, y) &= \frac{1}{E_y} (6f_1 xy + 2f_2 y) - \frac{\mu y}{E_x} (2f_4 y + 3f_5 y^2) - f_7 x - \\ &\quad - \frac{f_3}{G} x - \frac{3f_5}{E_x} x^2 + f_6. \end{aligned} \right\} (2.6)$$

Эти перемещения получены из решения плоской задачи теории упругости, когда функция напряжений задана в виде  $\varphi(x, y) = f_1 x^3 + f_2 x^2 + f_3 xy + f_4 y^2 + f_5 y^3$ ; причем совместность деформаций обеспечивается при любых коэффициентах внутри элемента. Постоянные коэффициенты  $f_6$ ,  $f_7$  и  $f_8$  в выражении (2.6) возникли при получении перемещений. При решении плоской задачи методом перемещений в каждом узле вводят два неизвестных линейных перемещения  $u_i$  и  $v_i$ . Постоянные коэффициенты  $f_1, \dots, f_8$  могут быть легко выражены через перемещения четырех узлов элемента, если составить соответствующую систему уравнений (для каждого узла по два уравнения). Напряжения внутри элемента проще всего найти через функцию напряжений  $\varphi(x, y)$ .

Важным моментом является получение матрицы жесткости элемента, которая необходима для составления систем канонических уравнений метода перемещений для рассчитываемой конструкции.

Порядок составления матрицы жесткости для прямоугольного элемента толщиной  $h$ , шириной  $a$  и высотой  $b$  следующий.



В уравнения (2.6) для  $u$  и  $v$  подставляют координаты узлов элемента, что дает матрицу  $\mathbf{A}$  восьмого порядка. Получают обратную матрицу  $\mathbf{A}^{-1}$ , из которой берут пять строк в соответствии с числом постоянных  $f_i$  в функции напряжений, т. е. рассматривают в дальнейшем матрицу  $\mathbf{A}_5^{-1}$ . Вводят матрицу физикомеханических параметров элемента, в данном случае из ортотропного материала

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\gamma} \begin{bmatrix} E_x & (\mu_y E_y) & 0 \\ (\mu_x E_x) & E_y & 0 \\ 0 & 0 & \nu G \end{bmatrix}$$

при  $\mu_x E_x = \mu_y E_y$ ,  $\nu = 1 - \mu_x \mu_y$ .

Матрицу жесткости рассматриваемого прямоугольного элемента получают из выражения [60]:

$$\mathbf{r} = h (\mathbf{A}_5^{-1})' \left[ \int_{-0,5a}^{0,5a} \int_{-0,5b}^{0,5b} \mathbf{B}' \mathbf{C} \mathbf{B} \, dx dy \right] \mathbf{A}_5^{-1}. \quad (2.7)$$

Матрица  $\mathbf{B}$  имеет вид:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{\mu_x}{E_y} 6x & -2\frac{\mu_x}{E_y} & 0 & \frac{2}{E_x} & \frac{6y}{E_x} \\ \frac{6x}{E_y} & \frac{2}{E_y} & 0 & -\frac{2\mu_y}{E_x} & -\frac{\mu_y}{E_x} 6y \\ 0 & 0 & -\frac{1}{G} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что матрицы  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{B}$  входят в следующие уравнения связи:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [\mathbf{C}] \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = [\mathbf{B}] \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{bmatrix}.$$

Перемещение точек прямоугольного элемента из его плоскости при изгибе может быть задано в виде:

$$\begin{aligned} \omega(x, y) = & f_1 + f_2 x + f_3 y + f_4 x^2 + f_5 y^2 + f_6 xy + \\ & + f_7 x^2 y + f_8 xy^2 + f_9 x^3 + f_{10} y^3 + f_{11} x^3 y + f_{12} xy^3. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Данный полином удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению изгибаемой пластины. На каждый узел (угол) пластинки накладываются связи — одна линейная (прогиб)  $\omega$  и две угловые (углы поворота)  $\frac{\partial \omega}{\partial x}$  и  $\frac{\partial \omega}{\partial y}$ . Для получения матрицы жесткости необходимо предварительно получить три матрицы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ , и  $\mathbf{C}$ . Матрица  $\mathbf{A}$  получается в результате подстановки координат узлов элемента в уравнение (2.8) и выражения  $\frac{\partial \omega}{\partial x}$  и  $\frac{\partial \omega}{\partial y}$ . Для каж-

дого узла имеем 3 уравнения и порядок матрицы **A** будет равен 12. Матрица **B** входит в преобразование

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \end{bmatrix} = [\mathbf{B}] [f_q] \text{ при } \mathbf{B} = \\
 & = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & (2y) & 0 & (6x) & 0 & (6xy) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & (2x) & 0 & (6y) & 0 & (6xy) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & (2x) & (2y) & 0 & 0 & (3x^2) & (3y^2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & (2x) & (2y) & 0 & 0 & (3x^2) & (3y^2) \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Матрица **C** входит в преобразование

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ M_{yx} \end{bmatrix} = -[\mathbf{C}] \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \end{bmatrix} \text{ при } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} D_x & (\mu_x D_x) & 0 & 0 \\ (\mu_y D_y) & D_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_K \end{bmatrix};$$

$$D_x = \frac{E_x h^3}{12\nu}; \quad D_y = \frac{E_y h^3}{12\nu}; \quad D_K = \frac{Gh^3}{6}; \quad \mu_x D_x = \mu_y D_y.$$

После введения этих выражений матрица жесткости изгибаемого прямоугольного элемента:

$$\mathbf{r} = h (\mathbf{A}^{-1})' \begin{bmatrix} 0,5a & 0,5b \\ \int_{-0,5a}^{0,5a} & \int_{-0,5b}^{0,5b} \mathbf{B}' \mathbf{C} \mathbf{B} \, dx dy \end{bmatrix} \mathbf{A}^{-1}. \quad (2.9)$$

Используя полученные выражения (2.7) и (2.9), можно дать развернутые формулы для матриц жесткости при плоском напряженном состоянии и изгибе пластины.

#### 2.4. ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДОВ РАСЧЕТА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СИСТЕМ К СТАЛЬНЫМ МОСТАМ

Существующие теории и методы расчета пространственных систем могут быть эффективно использованы для расчета стальных мостов. В зависимости от вида конструкции необходимо учитывать особенности применения того или иного метода расчета.

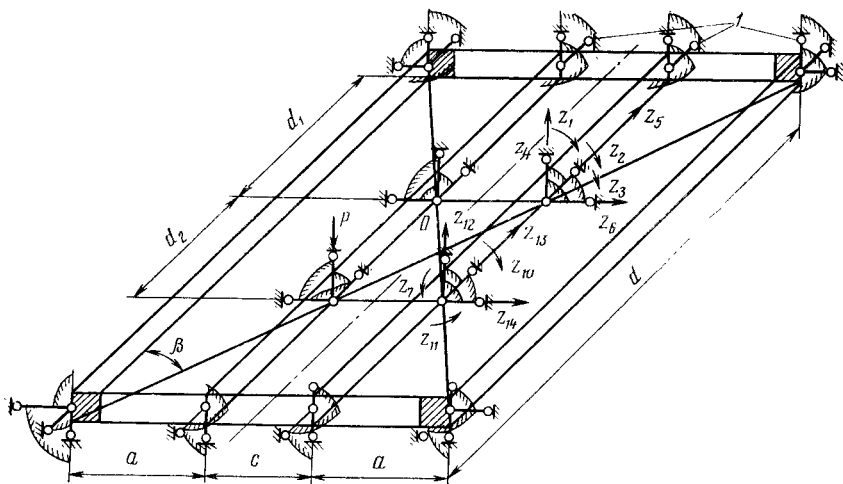


Рис. 2.9. Основная система для кинематически неопределимого блока:  
 1 — внешние кинематические воздействия

Методы стержневых систем в канонической форме широко используются для расчета при проектировании мостов. В частности, метод перемещений применен автором для пространственного расчета сквозных пролетных строений под железную дорогу. В них конструкция проезжей части (балочная клетка) посредством специальных диафрагм включена в совместную работу с главными фермами, что значительно повысило степень кинематической неопределимости системы.

При реализации метода расчета на ЭВМ целесообразно выделять из системы кинематически неопределимые блоки, в качестве которых, в данном случае, можно принимать конструкцию проезжей части, заключенную между двумя соседними поперечными балками.

Такой подход позволяет, с одной стороны, сократить число неизвестных, определяемых на одном этапе расчета, а с другой — стандартизировать расчет балочной клетки проезжей части, для которой вычисление коэффициентов уравнений имеет ряд тонкостей (учет эксцентриситетов, схем диафрагм).

Пример для кинематически неопределимого блока проезжей части показан на рис. 2.9. Выделены внешние кинематические воздействия и внешние силы по отношению к блоку. В качестве внешних кинематических воздействий выступают линейные и угловые перемещения, которые являются неизвестными для пролетного строения в целом и должны быть определены. В расчете блока их величины принимают равными единице при определении реакций. Кинематически неопределимый блок имеет внутреннюю неопределимость (см. рис. 2.9), которая раскрывается методом перемещений.

После решения глобальной системы уравнений к блоку обращаются повторно с целью определения усилий в элементах блока. В реализации метода на ЭВМ «вход» и «выход» блока оформляют так, чтобы можно было вычислять как реакции блока на внешние воздействия, так и усилия во всех его элементах.

Рассмотренный подход к расчету сквозных пролетных строений реализован автором в программе СК [10]. Опыт показал целесообразность разработки специализированных программ для определенного класса конструкций при полной автоматизации расчета — получения расчетных усилий в элементах.

Методы тонкостенных стержней открытого и замкнутого профиля можно использовать для расчета сплошнотенчатых конструкций пролетных строений, в том числе вантовых, а также для решения широкого круга вопросов пространственной работы сооружений. Предположение о недеформируемости контура поперечного сечения позволяет свести к минимуму число неизвестных интегральных факторов.

В обычной постановке задачи, в методе перемещений неизвестны в каждом узле три угловых, три линейных перемещения и деформация. Возможность учета переменности поперечного сечения по длине пролета, а также любого типа упругих связей в узлах делает метод тонкостенных стержней достаточно эффективным, особенно в случае рассмотрения моста как единой системы. Известна программа автора [47], реализующая данный метод на ЭВМ.

В рамках гипотезы о недеформируемости контура поперечного сечения можно решать вопросы неравномерного распределения напряжений по ширине пролетного строения (случай симметричного нагружения поперечного сечения). Для этого нужно разложить продольные деформации в ряд по координатным функциям и учесть сдвиги. Такой подход позволяет с единых позиций подойти к расчету как при изгибе, так и кручении любых типов сечений — открытых, замкнутых, комбинированных. Соответствующая программа для ЭВМ разработана Н. М. Митропольским под руководством автора<sup>1</sup>.

Методы плитно-балочных конструкций существуют в различных модификациях и используются как в форме метода сил, так и метода перемещений. В общем случае предпочтение, видимо, нужно отдать методу перемещений, хотя имеются весьма положительные примеры использования и метода сил. Данный метод точен для широкого класса конструкций в рамках прикладной теории упругости и поэтому часто используется для расчета мостовых конструкций. Пластины, входящие в состав расчетной схемы, могут быть изотропными или анизотропными, что важно для стальных конструкций с ребристыми плитами. Наиболее целесообразной модификацией данного метода для стальных мостов — вариант расчетной схемы по типу «пластина — стержень — пластина», позволяющей

---

<sup>1</sup> Более детально с реализацией теории тонкостенных стержней на ЭВМ можно ознакомиться в литературе [47].

рассчитывать точно как коробчатые системы, так и пролетные строения открытого профиля.

Поскольку методом плитно-балочных конструкций решаются практически все вопросы пространственного расчета данного класса конструкций, целесообразно распространить его и на сложные системы — неразрезные, с дискретными поперечными связями, сложного очертания в плане. В последнем случае можно использовать метод расширения заданной системы [3].

Опыт практического применения метода плитно-балочных конструкций<sup>1</sup>, реализованного в ряде программ (МП-4 автора, Слика Ю. М. Егорушкина и др.), оказался весьма положительным. В то же время есть возможности совершенствования рассматриваемого метода и его возможности нельзя считать исчерпанными. В частности, можно учитывать переменность высоты балок по длине пролета путем компенсации этой переменности дополнительными нагрузками. Вообще, принимая разрезное пролетное строение в качестве основной системы можно рассчитывать весьма многообразные типы мостов.

Метод конечных элементов существует в различных модификациях и нашел широкое распространение в расчетах самых разнообразных конструкций. Глобальная система уравнений метода может быть получена как методом Бубнова-Галеркина, так и с использованием энергетических представлений. Потенциальная энергия системы для метода перемещений может быть записана в виде:

$$\Pi = \sum_{i=1}^n P_i Z_i - \sum_{j=1}^m \int_V W_j dV, \quad (2.10)$$

где  $P$  — внешние силы, число которых  $n$ ;  $Z_i$  — искомые узловые перемещения;  $m$  — число элементов, на которые разделена рассчитываемая система;  $W_j$  — внутренняя удельная потенциальная энергия в точке элемента объемом  $V$ .

Для определения неизвестных перемещений  $Z_i$  имеем  $n$  линейных уравнений

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Z_i} = 0 \text{ при } i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.11)$$

Важный этап расчета — построение матрицы жесткостей элемента в методе перемещений. Для случая анизотропной пластинки соответствующие формулы приведены в п. 2.3.

При реализации метода часто оказывается необходимым использовать так называемые суперэлементы (кинематически неопределимые блоки), что позволяет уменьшить порядок глобальной системы уравнений. Для стальных пролетных строений в качестве суперэлемента можно принять блок на всю ширину поперечного сечения и длиной, определяемой особенностями конструкции, например, дли-

<sup>1</sup> В литературе даются практические примеры реализации метода [29, 12, 44].

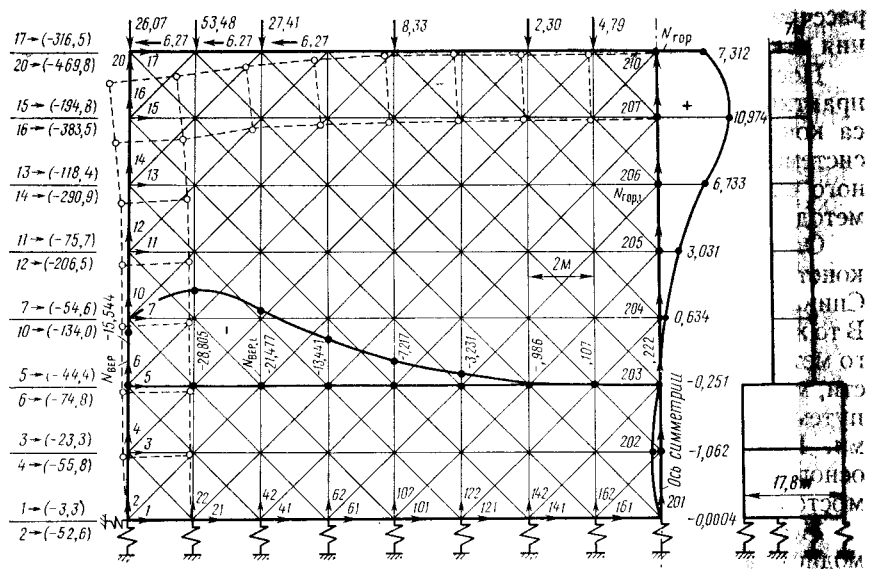


Рис. 2.10. Расчетная схема перемещений и усилий в опоре под пилоном.  $1 \div 210$  — перемещения узлов. Перемещения в метрах даны увеличенными в  $E$  раз, где  $E$  — модуль упругости бетона в мегапаскалях; усилия  $N_{top}$  и  $N_{ver}$  — в мегапьюн

ной, равной шагу поперечных связей. Тогда блоки «стыкуются» только по контуру поперечного сечения и матрица глобальной системы уравнений имеет ленточную структуру. При расчете протяженных систем, каковыми являются мосты, данный подход будет естественным.

Методы стержневых систем могут быть интерпретированы с позиций метода конечных элементов и в этом случае он будет точным методом в рамках принятых кинематических гипотез. Более того, возможно представление сплошного тела в виде решетчатой (стержневой) модели. Это расширяет область применения классических методов расчета стержневых систем. В качестве примера рассчитана опора под пилоном вантового моста (рис. 2.10) с использованием программы ПС-1 [47]. Решена задача о плоском напряженном состоянии пластины с переменной по высоте толщиной. Замена сплошного тела перекрестной стержневой системой в виде комплекса квадратных элементов позволила определить напряженное и деформированное состояние опоры моста<sup>1</sup>.

Для реализации метода конечных элементов разработаны программы, из которых можно отметить вычислительные комплексы «СПРИНТ», «ЛИРА», «СУПЕР».

<sup>1</sup> Детали определения жесткостей элементов и учета коэффициента Пуассона можно найти в литературе [47].

# 3. КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД ПРИКЛАДНОЙ ДЕФОРМАЦИОННОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

## 3.1. ОСОБЕННОСТИ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ И МЕТОДА УПРУГИХ РЕШЕНИЙ

Наиболее развита в настоящее время теория малых деформаций упругопластических тел, что соответствует расчету конструкций с учетом физической нелинейности. Полагают [21], что единственный дефект современной математической теории пластичности — отсутствие доказательства теоремы существования решения основной краевой задачи, что, однако, не служит серьезным препятствием для широкого использования теории пластичности в технических приложениях.

Первая математическая теория пластического течения металлов была создана в XIX в. Б. Сен-Венаном и основывалась на гипотезе о пропорциональности девиаторов напряжений и скоростей деформаций при условии текучести Треска (наибольших касательных напряжений). За прошедший период были созданы различные варианты теории пластичности, но как отмечает А. А. Ильюшин [18], все же не было создано по степени соответствия опыту сопоставимой с теорией упругости Коши-Навье. Для одних типов нагружения тел более правильными оказывались результаты расчетов по теории течения, для других — по теории деформаций и т. д.

Основы общей математической теории пластичности разработаны А. А. Ильюшиным [18], но практическое использование затруднено; однако можно устанавливать границы обоснованного применения ее вариантов, а также найти правильные соотношения для ранее неисследованных процессов деформирования.

Анализом основных теорий пластичности — теории вязкопластических течений, малых упругопластических деформаций, идеальной пластичности [18] с позиций общей математической теории — показано, что теория малых упругопластических деформаций строга справедлива для процессов простого нагружения и дает удовлетворительные результаты для процессов, заметно отклоняющихся от простых нагружений. Главная проблема теории пластичности — установление соотношений между напряжениями и деформациями, для чего используется ряд гипотез и предположений. Наиболее общей является теория пластичности, основанная на теории течения и рассматривающая скорости пластических деформаций и напряжений. Она базируется на фундаментальном квазитермодинамическом постулате Друккера, гласящем [27], что, если элемент тела находится в каком-либо напряженном состоянии и под влиянием внешнего воздействия в нем возникают дополнительные напряжения, то как в процессе приложения дополнительных напряжений, так и за полный цикл приложения и снятия дополнительных напряжений, внешнее воздействие совершает положительную рабо-

ту, т. е. из элемента, имеющего исходное напряженное состояние, нельзя выделить полезную энергию в процессе приложения и снятия дополнительных напряжений.

Для поликристаллических тел используется принцип максимального сопротивления пластическим деформированиям [27], по которому каждому приращению пластической деформации при данном напряженном состоянии  $\sigma_{ij}$  соответствует приращение работы, равное или большее значения работы, совершаемой приращением деформации  $d\varepsilon_{ij}^{(p)}$  при любом другом напряженном состоянии  $\sigma_{ij}^*$ , соответствующем области, ограниченной поверхностью текучести или на самой поверхности текучести, т. е.

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) d\varepsilon_{ij}^{(p)} \geq 0.$$

Принцип максимального сопротивления пластическому деформированию имеет два важных следствия: 1) поверхность течения в пространстве напряжений или обобщенных сил никогда не может быть вогнутой; 2) поверхности течения должны соответствовать уравнения, связывающие напряжение и деформацию, т. е. вектор приращения деформации в данной точке поверхности течения перпендикулярен к поверхности в той же точке и пропорционален вектору внешней нормали (напряжению).

Кроме этого, в теориях пластичности используют предположение о том, что действительные деформации всегда можно представить в виде суммы упругих  $\varepsilon_e$  и пластических  $\varepsilon_p$  деформаций, причем упругие подчиняются закону Гука.

Помимо теории течения, как уже было указано, существует также деформационная теория пластичности Генки-Ильюшина, которая не рассматривает скорости пластических деформаций и напряжений и в связи с этим имеет серьезные дефекты [19, 21]. Однако несмотря на это, признается возможность ее использования в практических приложениях, если пути нагружения всех элементов конструкции не слишком сильно отклоняются от пропорционального нагружения. При этом ограничения нагружений более слабые для случая материалов с сингулярными поверхностями текучести, т. е. когда на границе между упругой и пластической областями имеются ребра или угловые точки. При полностью произвольных путях нагружения деформационная теория, естественно, не применима; однако следует учитывать, что для каждого элемента конструкции можно заранее определить режим нагружения, и ограничение отпадает.

В. В. Новожиловым, Л. М. Качановым, В. Т. Койтером и другими исследователями показано, что при активном процессе нагружения уравнения деформационной теории (упругопластических деформаций) совпадают с уравнениями нелинейно-упругого тела, что, с одной стороны, ограничивает ее применение при сложных зигзагообразных путях нагружения, а с другой — открывает возможности использования теорем и методов нелинейной теории упругости (имеется в виду физическая нелинейность).



Теории скольжения, выдвигаемые иногда как самостоятельные теории пластичности, являются частными случаями теории течения для тел с сингулярной поверхностью текучести [18]. Необходимо дополнительно отметить, что существуют многочисленные задачи [28], где деформационная теория дает результаты достаточно близкие к результатам по теории течения, как более точной.

Метод упругих решений, предложенный А. А. Ильюшиным для задач деформационной теории пластичности, позволяет свести нелинейную задачу к последовательности линейно упругих задач [17]. Для этого метода известны основные варианты — дополнительных нагрузок [17] и переменных параметров упругости [6].

Решать необходимо уравнение малых упругопластических деформаций [28]:

$$\sigma_x - \sigma_0 = \frac{2G}{\psi} (\varepsilon_x - \varepsilon_0); \dots \tau_{xy} = \frac{G}{\psi} \gamma_{xy}; \dots \text{ при } \psi = 3G\varepsilon_i / \sigma_i = \sigma_i^* / \sigma_i, \quad (3.1)$$

где  $\psi$  — функция пластичности в точке;  $\sigma_i$ ,  $\varepsilon_i$  — интенсивности напряжений и деформаций в рассматриваемой точке;  $\sigma_i^*$ ,  $\sigma_i$  — интенсивности напряжений в упругом и упругопластическом телах при одинаковой интенсивности деформаций.

Функцию пластичности в точке можно выразить через интенсивность пластической деформации  $\varepsilon_{ip}$  в той же точке:

$$\psi = 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{E\varepsilon_{ip}}{\sigma_i(1+\mu)}.$$

Для простых случаев диаграмм деформирования интенсивность напряжений в точке может быть, в свою очередь, выражена через интенсивность пластической деформации. Например, для диаграммы с линейным упрочнением с модулем  $E'$  и параметром разупрочнения  $\lambda = 1 - E'/E$  получим

$$\sigma_i = E [\varepsilon_T - \varepsilon_{ip} (1 - 1/\lambda)],$$

где  $\varepsilon_T$  — деформация, соответствующая пределу текучести (точка перелома на диаграмме).

Для диаграммы Прандтля  $\sigma_i = E\varepsilon_T$ . Необходимо отметить также метод упругопластических решений задач теории пластичности, предложенный А. Д. Поспеловым [86]. Сущность его заключается в следующем. В первом приближении решается упругая задача и определяются зоны пластических деформаций. Во втором приближении дополнительные нагрузки прикладывают к телу с переменными параметрами упругости, вычисленными на основе первого приближения. Третье и последующие приближения выполняют по методу дополнительных нагрузок. Данный метод повышает сходимость приближений.

Дополнительные напряжения в методе дополнительных нагрузок можно выразить через составляющие пластической деформации в точке. Для упругих напряжений, соответствующую

щих заданным пластическим деформациям, имеет место соотношение:

$$\sigma_x^* - \sigma_0^* = 2G (\varepsilon_x - \varepsilon_0).$$

С другой стороны, в упругопластическом состоянии зависимость между деформациями и напряжениями имеет вид:

$$\varepsilon_x - \varepsilon_0 = \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i} (\sigma_x - \sigma_0).$$

$$\text{Тогда } \sigma_x^* - \sigma_0^* = 2G \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i} (\sigma_x - \sigma_0).$$

Пользуясь зависимостью для пластических деформаций  $\varepsilon_{xp} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\varepsilon_{ip}}{\sigma_i} (\sigma_x - \sigma_0)$ , а также учитывая, что  $\psi = 3G \varepsilon_i / \sigma_i$ , получим новое выражение для упругих напряжений:

$$\sigma_x^* - \sigma_0^* = \frac{2}{3} \psi \sigma_i \frac{\varepsilon_{xp}}{\varepsilon_{ip}}.$$

Если это уравнение умножить на величину  $-(1 - 1/\psi)$ , получим значения дополнительной нагрузки

$$\bar{\sigma}_x = - \left(1 - \frac{1}{\psi}\right) (\sigma_x^* - \sigma_0^*) = - \frac{E}{1 + \mu} \varepsilon_{xp}, \text{ или } \bar{\sigma}_x = - \frac{E}{1 + \mu} \varepsilon_{xp}; \dots,$$

при этом  $\psi = 1 + 3E\varepsilon_{ip}/[2\sigma_i(1 + \mu)]$ .

Аналогично для касательных напряжений

$$\bar{\tau}_{xy} = - \frac{E}{2(1 + \mu)} \gamma_{xyp} \dots$$

Внося полученные значения дополнительных напряжений в выражение для интенсивности напряжений, будем иметь [50]

$$\bar{\sigma}_i = \frac{3E}{2(1 + \mu)} \varepsilon_{ip}. \quad (3.2)$$

Переменные параметры упругости в методе переменных параметров упругости можно выразить через интенсивность пластической деформации в точке [50]:

$$E^* = \frac{E}{1 + E\varepsilon_{ip}/\sigma_i}; \quad G^* = \frac{G}{1 + 3G\varepsilon_{ip}/\sigma_i}; \quad \mu^* = \frac{2\mu + E\varepsilon_{ip}/\sigma_i}{2(1 + E\varepsilon_{ip}/\sigma_i)}. \quad (3.3)$$

Используя формулы (3.2) и (3.3), устанавливаем связь между рассматриваемыми вариантами метода упругих решений:

$$\left. \begin{aligned} E^* &= \frac{E}{1 + 2(1 + \mu) \bar{\sigma}_i / (3\sigma_i)}; \quad G^* = \frac{G}{1 + \bar{\sigma}_i / \sigma_i}; \quad \mu^* = \\ &= \frac{\mu + \frac{1 + \mu}{3} \bar{\sigma}_i / \sigma_i}{2 \left(0,5 + \frac{1 + \mu}{3} \bar{\sigma}_i / \sigma_i\right)}, \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

а в случае диаграммы Прандтля ( $\sigma_i = \sigma_T$ ,  $\mu = 0,5$ ):

$$E^* = \frac{E}{1 + \bar{\sigma}_i / \sigma_T}; \quad G^* = \frac{G}{1 + \bar{\sigma}_i / \sigma_T}; \quad \mu^* = 0,5. \quad (3.4, a)$$

Выражения (3.4) и (3.4, а) получены, по-видимому, впервые в 1975 г. [50].

Приведенные выражения для переменных параметров упругости совпадают со значениями, данными А. И. Биргером [6], если значение интенсивности пластической деформации принять в виде

$$\varepsilon_{ip} = 2\sigma_i (\psi - 1) (1 + \mu) / (3E).$$

Возможность представлять дополнительные напряжения и переменные параметры упругости в функции пластической деформации позволяет обобщать известные варианты метода упругих решений.

### 3.2. ФОРМЫ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ. КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД ДЕФОРМАЦИОННОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Механическое поведение материалов в макроскопическом масштабе принято описывать с помощью деформации, вызванной приложением к телу напряжений, изменением температуры и т. д. Упругие и пластические деформации в известной мере отражают свойства твердых тел и в значительной степени зависят от их структуры. В общем случае необходимо иметь зависимость между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций. Если принять  $\mu = 0,5$ , то последняя совпадает с диаграммой растяжения.

Истинные диаграммы растяжения, которые используются в расчетах, могут иметь различную форму в зависимости от свойств материала, а также степени схематизации диаграмм. Наиболее простая зависимость между  $\sigma$  и  $\varepsilon$  — это диаграмма Прандтля (рис. 3.1, а), которую можно применять в расчетах для строительных сталей. При этом деформация  $\varepsilon = \varepsilon_T + \varepsilon_p$ , где  $\varepsilon_p$  — пластическая деформация, а  $\sigma = \sigma_T$  при  $\varepsilon_p \neq 0$ . Для высокопрочных сталей необходим учет упрочнения, что отражается диаграммой

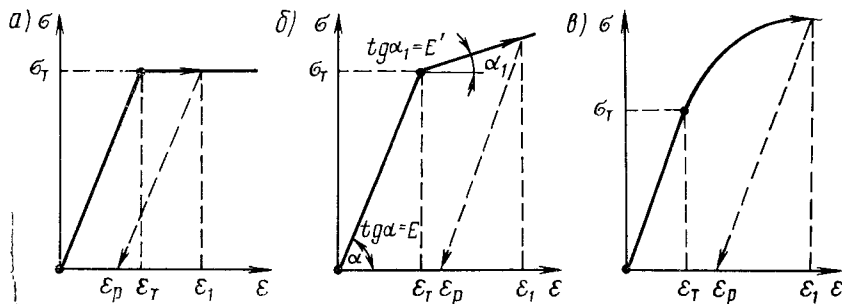


Рис. 3.1. Диаграммы деформирования стали

растяжения. Диаграмма с линейным упрочнением изображена на рис. 3.1, б. Выражение для деформации в этом случае имеет вид  $\epsilon = \epsilon_T + \epsilon_p/\lambda$  (где  $\lambda = 1 - E'/E$  — параметр разупрочнения), а  $\sigma = E [\epsilon_T - \epsilon_p(1 - 1/\lambda)]$  при  $\epsilon_p \neq 0$ . В общем случае (рис. 3.1, а) диаграмма  $\sigma - \epsilon$  может иметь криволинейный характер и задаваться по форме таблицы или аппроксимироваться тем или иным способом, например, сплайн-функциями. Выражения для полной деформации (через значение пластической и предел текучести) при этом может быть весьма сложным.

Часто для зоны упрочнения принимают зависимость  $\sigma = \sigma_T \times (\epsilon/\epsilon_T)^m$ , где  $m$  — постоянный для данного материала коэффициент ( $0 \leq m \leq 1$ ). Одной из общих зависимостей, справедливой для всех значений  $\epsilon$ , следует считать формулу Рамберга — Осгуда:

$$\sigma = E (\epsilon + K\epsilon^N)$$

при  $N = 1 + \frac{\ln\left(\frac{m_1 - 1}{m_2 - 1}\right)}{\ln(\epsilon_1/\epsilon_2)}$ ,  $K = \frac{m_1 - 1}{\epsilon_1^{N-1}}$ ;  $m_1 = \frac{\sigma_1}{E\epsilon_1}$ ,  $m_2 = \frac{\sigma_2}{E\epsilon_2}$ ,

где  $E$  — модуль упругости Юнга;  $\sigma_1, \epsilon_1$  и  $\sigma_2, \epsilon_2$  — координаты некоторых точек диаграммы в зоне упрочнения.

Пример реальной диаграммы растяжения для стали 15ХСНД приведен на рис. 3.2, а, где показан начальный участок, наиболее важный для расчетов в упругопластической стадии. Очевидно, что в данном случае целесообразно для расчетов принять диаграмму Прандтля. Обозначенная на оси  $\epsilon_i$  пластическая деформация  $\epsilon_p = 0,0025$  дает представление о ее реальных размерах по сравнению с упругой, соответствующей тому или иному уровню напряжений:

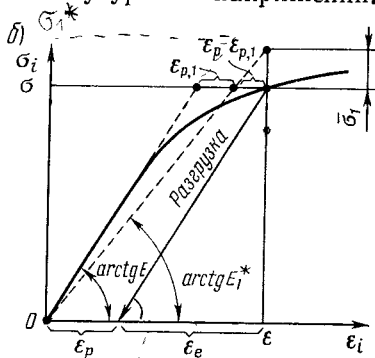
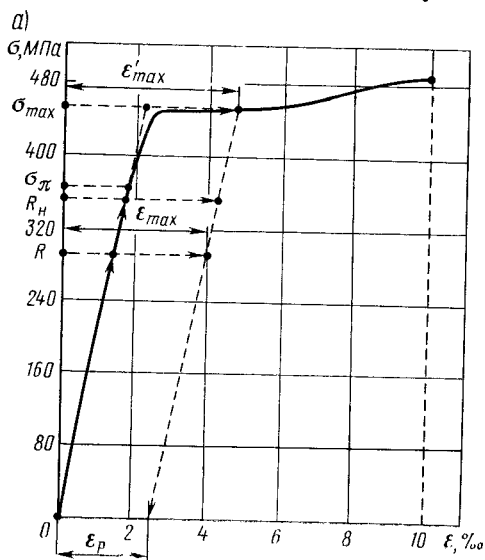


Рис. 3.2. Экспериментальная и обобщенная диаграммы деформирования стали

$R = 290$  МПа — расчетное сопротивление,  $R_n = 350$  МПа — нормативное сопротивление,  $\sigma_{\max} = \sigma_T = 448$  МПа — максимальное напряжение в рассматриваемом случае при  $\varepsilon_p = 0,0025$ . За исходную величину для записи выражения диаграммы  $\sigma - \varepsilon$  целесообразно принять пластическую деформацию, соответствующую тому или иному значению напряжения. Считая, что часть  $\varepsilon_{p1} = \nu \varepsilon_p$  общей пластической деформации идет на изменение модуля, выражение диаграммы  $\sigma - \varepsilon$  можно записать в виде (рис. 3.2, б):

$$\sigma = \sigma_1^* - \bar{\sigma}_1 \quad (3.5)$$

$$\text{при } \sigma_1^* = E_1^* \varepsilon, E_1^* = E \frac{\varepsilon - \varepsilon_p}{\varepsilon - \varepsilon_p (1 - \nu)}; \varepsilon_{p1} = \nu \varepsilon_p; \bar{\sigma}_1 = E_1^* \varepsilon_p (1 - \nu), \varepsilon_{p2} = (1 - \nu) \varepsilon_p,$$

где  $\sigma_1^*$  — некоторое упругое напряжение в точке;  $E_1^*$  — секущий переменный модуль, определяемый по величине  $\varepsilon_{p1}$  (при  $\nu = 1$  получается значение обычного секущего модуля);  $\varepsilon_{p1}$  — пластическая деформация;  $\bar{\sigma}_1$  — дополнительное напряжение, определяемое по величине  $\varepsilon_{p2}$ ;  $\varepsilon_{p2}$  — пластическая деформация (при  $\nu = 0$  получается значение обычного дополнительного напряжения).

Предлагаемое выражение (3.5) служит наиболее общим представлением диаграммы  $\sigma - \varepsilon$  при использовании метода упругих решений и отражает комбинированный метод решения задач деформационной теории пластичности. Для диаграммы Прандтля выражение (3.5) примет вид:

$$\sigma = \frac{E}{1 + \nu \varepsilon_p / \varepsilon_T} [\varepsilon - \varepsilon_p (1 - \nu)],$$

где  $\varepsilon_T$  — деформация, соответствующая пределу текучести.

При  $\nu = 1$  (метод переменных параметров упругости) имеем  $\sigma = E\varepsilon / (1 + \varepsilon_p / \varepsilon_T)$ ; при  $\nu = 0$  (метод дополнительных нагрузок) имеем  $\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_p)$ .

Физическую сущность рассматриваемых методов решения уравнений теории пластичности можно сформулировать так: происходящее под нагрузкой в упругопластической стадии изменение механических свойств материала, характеризующее интенсивностью пластической деформации  $\varepsilon_{ip}$  в точке, можно «компенсировать» (при применении упругих методов решения) изменением параметров упругости в точке или же приложением в этой точке дополнительного напряжения. Если использовать свойство аддитивности пластических деформаций, например, представляя  $\varepsilon_{ip1} \times \varepsilon_{ip2} = \varepsilon_{ip}$ , то можно одну часть пластической деформации  $\varepsilon_{ip1} = \nu \varepsilon_{ip}$  направить на изменение параметров упругости, а другую  $\varepsilon_{ip2} = (1 - \nu) \varepsilon_{ip}$  — на создание дополнительных напряжений (нагрузок), прикладываемых к телу с переменными параметрами упругости.

Предположим, что упругое тело имеет параметры упругости  $E^*$ ,  $G_1^*$ ,  $\mu_1^*$ , меняющиеся от точки к точке, и найдем при этом напряжения

$\sigma_{x1}^*, \dots, \tau_{xy1}, \dots$ , соответствующие деформациям  $\varepsilon_x, \dots, \gamma_{xy}, \dots$  упругопластического состояния:

$$\sigma_{x1}^* = 2G_1^* (\varepsilon_x - \varepsilon_0) + \frac{E_1^*}{1 - 2\mu_1^*} \varepsilon_0; \dots; \tau_{xy1}^* = G_1^* \gamma_{xy}; \dots \quad (3.6)$$

С другой стороны, в упругопластическом состоянии напряжения и деформации связаны зависимостями [28]

$$\sigma_x = \frac{2G}{\psi} (\varepsilon_x - \varepsilon_0) + \frac{E}{1 - 2\mu} \varepsilon_0; \dots; \tau_{xy} = \frac{G}{\psi} \gamma_{xy}; \dots \quad (3.7)$$

при  $\psi = 1 + \frac{3E\varepsilon_{ip}}{2\sigma_i(1 + \mu)}$ ,  $\varepsilon_0 = \frac{1}{3} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$ .

Вычитая из уравнений (3.7) выражение (3.6), после преобразований получим:

$$\sigma_x = \sigma_{x1}^* + \bar{\sigma}_{x1}; \dots; \tau_{xy} = \tau_{xy1}^* + \bar{\tau}_{xy1}; \dots, \quad (3.8)$$

где  $\bar{\sigma}_{x1}, \dots, \bar{\tau}_{xy1}, \dots$  — дополнительные напряжения, прикладываемые к телу с переменными параметрами упругости  $E_1^*, G_1^*, \mu_1^*$  и определяемые равенствами:

$$\bar{\sigma}_{x1} = \left( \frac{G}{\psi G_1^*} - 1 \right) (\sigma_{x1}^* - \sigma_{01}^*); \dots; \bar{\tau}_{xy1} = \left( \frac{G}{\psi G_1^*} - 1 \right) \tau_{xy1}^*; \dots$$

$E_1^*, G_1^*, \mu_1^*$  — переменные параметры упругости, определяемые по части ( $\varepsilon_{ip1} = \nu \varepsilon_{ip}$ ) общей пластической деформации в точке. При этом:

$$E_1^* = \frac{E}{1 + E\nu\varepsilon_{ip}/\sigma_i}; \quad G_1^* = \frac{G}{1 + 3G\nu\varepsilon_{ip}/\sigma_i}; \quad \mu_1^* = \frac{2\mu + E\nu\varepsilon_{ip}/\sigma_i}{2(1 + E\nu\varepsilon_{ip}/\sigma_i)};$$

$$\sigma_{01}^* = \frac{1}{3} (\sigma_{x1}^* + \sigma_{y1}^* + \sigma_{z1}^*), \text{ а также } G^* = E^*/[2(1 + \mu^*)];$$

$$E_1^*/(1 - 2\mu_1^*) = E/(1 - 2\mu).$$

Напряжения в упругопластической стадии можно выразить через напряжения в условном упругом теле с параметрами  $E_1^*, G_1^*, \mu_1^*$  в другой форме:

*Добавим  $\bar{\sigma}_{x1}, \bar{\tau}_{xy1}$*

$$\sigma_x = \frac{G}{\psi G_1^*} \sigma_{x1}^* - \left( \frac{G}{\psi G_1^*} - 1 \right) \sigma_{01}^*; \dots; \tau_{xy} = \frac{G}{\psi G_1^*} \tau_{xy1}^*; \dots \quad (3.9)$$

Напряжения  $\sigma_x, \dots, \tau_{xy}, \dots$ , упругопластического состояния должны удовлетворять уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0; \dots$$

где  $X, \dots$  — составляющие объемной силы.

Подставляя в эти уравнения выражения (3.8), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{x1}^*}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy1}^*}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz1}^*}{\partial z} + X + \bar{X}_1 = 0; \dots \text{ при } \bar{X}_1 = \\ = \frac{\partial \bar{\sigma}_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy1}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xz1}}{\partial z}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где  $\bar{X}_1, \dots$  — составляющие дополнительной объемной силы, прикладываемые к телу с переменными параметрами упругости  $E_1^*, G_1^*, \mu_1^*$ .

Напряжения  $\sigma_x, \dots, \tau_{xy}$  упругопластического состояния должны также удовлетворять граничным условиям на поверхности тела:

$$\sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n = X_\alpha; \dots,$$

где  $l, m, n$  — направляющие косинусы внешней нормали поверхности;  $X_\alpha, \dots$  — составляющие поверхностной нагрузки.

Внося в эти выражения значения напряжений по уравнениям (3.8), найдем

$$\sigma_{x1}^* l + \tau_{xy1}^* m + \tau_{xz1}^* n = X_\alpha + \bar{X}_{\alpha 1}; \dots, \quad (3.11)$$

где  $\bar{X}_{\alpha 1} = -(\bar{\sigma}_{ip} l + \bar{\tau}_{xyi} m + \bar{\tau}_{xzi} n)$ , ... — составляющие дополнительной поверхности нагрузки, прикладываемые к телу с переменными параметрами упругости  $E_1^*, G_1^*, \mu_1^*$ .

Поскольку значения переменных параметров упругости, а также дополнительных напряжений, зависят от искомого напряженного (деформированного) состояния, при решении задач используют метод последовательных приближений.

Рассмотрим применение комбинированного метода более подробно.

В первом приближении решаем упругую задачу ( $\varepsilon_{ip} = 0, E_1^{*(1)} = E, G_1^{*(1)} = G, \mu_1^{*(1)} = \mu$ ). На основе упругого расчета в каждой точке находим напряжения  $\sigma_x^{*(1)}, \dots, \tau_{xy}^{*(1)}, \dots$ ; интенсивности напряжений и деформаций

$$\sigma_i^{*(1)} = \frac{\sqrt{2}}{2} [(\sigma_x^{*(1)} - \sigma_y^{*(1)})^2 + \dots]^{1/2}; \varepsilon_i^{*(1)} = \frac{\sigma_i^{*(1)}}{E}.$$

На кривой деформирования откладываем значение  $\varepsilon_i^{*(1)}$ , по которому определяем интенсивность напряжений  $\sigma_i^{(1)}$  для упругопластической стадии в первом приближении. Пластическая деформация первого приближения  $\varepsilon_{ip}^{(1)} = \varepsilon_i^{*(1)} - \sigma_i^{(1)}/E$ , а функция пластичности в точке  $\psi^{(1)} = 1 + 3E\varepsilon_{ip}^{(1)}/[2\sigma_i^{(1)}(1 + \mu)]$ . Напряжения первого приближения в упругопластическом теле:

$$\sigma_x^{(1)} = \frac{1}{\psi^{(1)}} \sigma_x^{*(1)} - \sigma_0^{*(1)} \left( \frac{1}{\psi^{(1)}} - 1 \right), \dots, \tau_{xy}^{(1)} = \frac{1}{\psi^{(1)}} \tau_{xy}^{*(1)}, \dots$$

Во втором приближении находим новые параметры упругости  $E_1^{*(2)}$ ,  $G_1^{*(2)}$ ,  $\mu_1^{*(2)}$ , вычисляя их по части пластической деформации  $v\varepsilon_{ip}^{(1)}$ , и дополнительные напряжения

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{x1}^{(2)} &= \left( \frac{G}{\psi^{(1)} G_1^{*(2)}} - 1 \right) \left( \sigma_x^{*(1)} - \sigma_0^{*(1)} \right), \dots; \bar{\tau}_{xy1}^{(2)} = \\ &= \left( \frac{G}{\psi^{(1)} G_1^{*(2)}} - 1 \right) \tau_{xy}^*, \dots\end{aligned}$$

Далее решается упругая задача с измененными значениями параметров упругости и дополнительными нагрузками объемными и поверхностными. Из упругого расчета во втором приближении находим: напряжения  $\sigma_{x1}^{*(2)}$ , ...,  $\tau_{xy1}^{*(2)}$ , ...; интенсивности напряжений и деформаций

$$\sigma_{i1}^{*(2)} = \frac{\sqrt{2}}{2} [(\sigma_{x1}^{*(2)} - \sigma_{y1}^{*(2)})^2 + \dots]^{1/2}; \varepsilon_{i1}^{*(2)} = \frac{\sigma_{i1}^{*(2)}}{E_1^{*(2)}}.$$

Используя кривую деформирования, определяем новое значение  $\sigma_i^{(2)}$  в упругопластической стадии по величине  $\varepsilon_{i1}^{*(2)}$ . Находим пластическую деформацию второго приближения  $\varepsilon_{ip}^{(2)} = \varepsilon_{i1}^{*(2)} - \sigma_{i1}^{*(2)}/E$ , а также величину  $\psi^{(2)} = 1 + 3E\varepsilon_{ip}^{(2)}/[2\sigma_i^{(2)}(1 + \mu)]$ . Напряжения второго приближения в упругопластическом теле:

$$\begin{aligned}\sigma_x^{(2)} &= \frac{G}{\psi^{(2)} G_1^{*(2)}} \sigma_{x1}^{*(2)} - \sigma_{01}^{*(2)} \left( \frac{G}{G_1^{*(2)} \psi} - 1 \right); \dots; \tau_{xy} = \\ &= \frac{G}{\psi^{(2)} G_1^{*(2)}} \tau_{xy1}^*; \dots\end{aligned}$$

Заканчивают процесс последовательных приближений тогда, когда получают результаты двух последних приближений достаточно близкими.

Проиллюстрируем применение комбинированного метода на примере и з г и б а б а л к и прямоугольного сечения. Будем считать известным распределение общих и пластических относительных деформаций в сечении.

В соответствии с методом упругих решений, в форме комбинированного метода, для напряжений в упругопластической стадии имеем (для диаграммы Прандтля)

$$\sigma = \sigma_1^* - \bar{\sigma}_1$$

при  $\sigma_1^* = E_1^* \varepsilon$ ,  $E_1^* = E/(1 + v\varepsilon_p)$ ,  $\bar{\varepsilon}_p = \varepsilon_p/\varepsilon_T$ ,  $\bar{\sigma}_1 = \sigma_T \bar{\varepsilon}_p (1 - v)/(1 + v\bar{\varepsilon}_p)$ ,

где  $\sigma_1^*$  — напряжения в упругом теле с переменным модулем  $E_1^*$  и при деформациях, равных деформациям упругопластического состояния;  $\bar{\sigma}_1$  — дополнительные напряжения, прикладываемые к упругому телу с переменным модулем  $E_1^*$ .

Для прямоугольного сечения на рис. 3.3. дано распределение по высоте сечения общих деформаций  $\varepsilon$ , напряжений  $\sigma_1^*$ , модуля  $E_1^*$  и дополнительных напряжений  $\bar{\sigma}_1$  при значениях  $v = 1$  (метод пере-



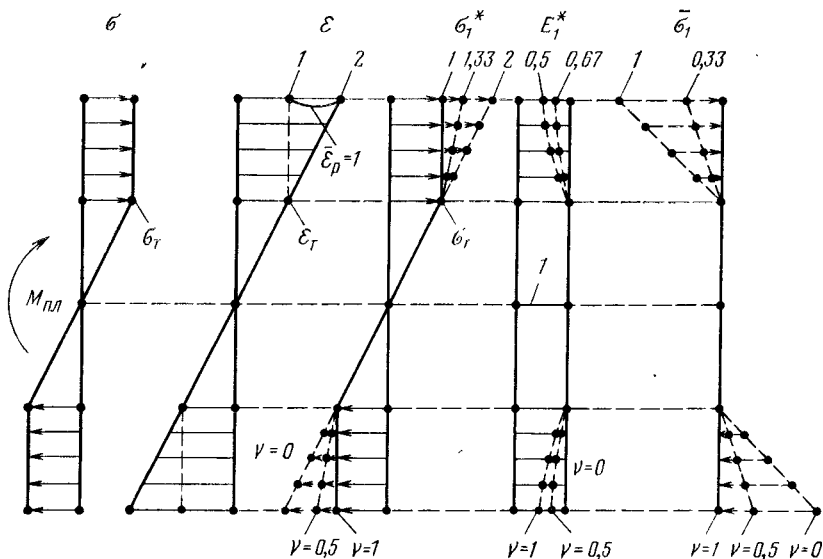


Рис. 3.3. Физическая интерпретация метода упругих решений в трех вариантах (А. Ильюшин —  $\nu=0$ , И. Биргер —  $\nu=1$ , автор —  $0 < \nu < 1$ )

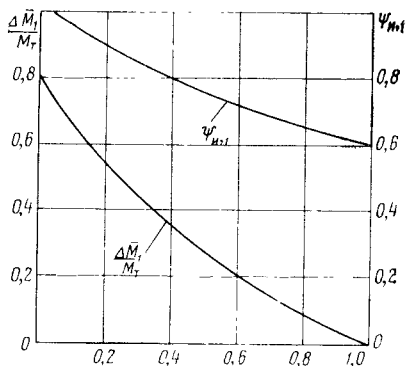


Рис. 3.4. Графики для функции пластичности и дополнительного момента для расчета по комбинированному методу

менных параметров упругости),  $\nu = 0,5$  (комбинированный метод) и  $\nu = 0$  (метод дополнительных нагрузок). Все три варианта метода упругих решений дают одинаковую эпюру напряжений  $\sigma$  в упруго-пластическом теле, имеющем деформации  $\epsilon$ .

Для кривизны в сечении, нагруженном моментом  $M_{пл} > M_T$ , комбинированный метод дает следующую зависимость

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_{пл} + \Delta \bar{M}_1}{EJ\psi_{пл}} \quad \text{при} \quad \Delta \bar{M}_1 = \sigma_T (1 - \nu) \int_F \frac{\bar{\epsilon}_p z}{1 + \nu \bar{\epsilon}_p} dF, \quad (3.12)$$

$$\psi_{пл} = \frac{1}{J} \int_F \frac{z^2}{1 + \nu \bar{\epsilon}_p} dF,$$

где  $\Delta \bar{M}_1$  — дополнительный момент в поперечном сечении;  $\psi_{пл}$  — функция пластичности для поперечного сечения.

Для прямоугольного сечения при  $\bar{\varepsilon}_{p\max} = 1$  на рис. 3.4 приведем зависимости  $\Delta M_1$  и  $\psi_{н1}$  от значения  $0 \leq v \leq 1$ , при этом интегралы вычислены численным методом. При  $v = 0$  (метод дополнительных нагрузок)  $\Delta \bar{M}_1 = \Delta \bar{M} \neq 0$ , а  $\psi_{н1} = 1$ ; для  $v = 1$  (метод переменных параметров упругости)  $\Delta M_1 = 0$ , а  $\psi_{н1} = \psi_{н} < 1$ .

Проведем интегрирование функций  $\Delta \bar{M}_1$  и  $\psi_{н1}$  для прямоугольного сечения. Обозначим высоту зоны по одну сторону от горизонтальной оси через  $h_{у\text{нр}}$ . Относительную высоту упругой зоны обозначим  $\kappa = 1/(1 + \varepsilon_{p\max})$ . Учитывая это, запишем выражение для функции пластичности:

$$\begin{aligned} \psi_{н1} = & \frac{1}{J} \int_{F_{у\text{нр}}} z^2 dF + \frac{1}{J} \int_{F_{п\text{л}, в}} \frac{z^2}{(1-v) + \frac{v}{h_{у\text{нр}}} z} dF + \\ & + \frac{1}{J} \int_{F_{п\text{л}, н}} \frac{z^2}{(1-v) - \frac{v}{h_{у\text{нр}}} z} dF = \kappa^3 \left\{ 1 + \frac{3}{2v^3} \left[ \left( 1 - v + \frac{v}{\kappa} \right)^2 - \right. \right. \\ & \left. \left. - 4(1-v) \left( 1 - v + \frac{v}{\kappa} \right) + 2(1-v)^2 \ln \left( 1 - v + \frac{v}{\kappa} \right) + 4(1-v) - 1 \right] \right\}. \end{aligned}$$

При  $v = 1$  (метод переменных параметров упругости)

$$\psi_{н} = -\frac{\kappa^3}{2} + \frac{3}{2} \kappa = c \sqrt{3-2c}; \quad c = M_{п\text{л}}/M_{т}.$$

Для дополнительного момента выражение имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{M}_1 = & \sigma_{т} (1-v) \left[ \int_{F_{п\text{л}, в}} \frac{z(z/h_{у\text{нр}} - 1)}{(1-v) + vz/h_{у\text{нр}}} dF + \right. \\ & \left. + \int_{F_{п\text{л}, н}} \frac{z(z/h_{у\text{нр}} + 1)}{(1-v) - vz/h_{у\text{нр}}} dF \right] = M_{т} \kappa^2 \frac{3(1-v)}{2v^3} \left[ \left( 1 - v + \frac{v}{\kappa} \right)^2 - \right. \\ & \left. - 4(1-v) \left( 1 - v + \frac{v}{\kappa} \right) + 2(1-v)^2 \ln \left( 1 - v + v/\kappa \right) + 4(1-v) - 1 \right]. \end{aligned}$$

При  $v = 0$  (метод дополнительных нагрузок)

$$\Delta M = M_{т} \left( \frac{\kappa^2}{2} + \frac{1}{\kappa} - \frac{3}{2} \right) = M_{т} \left( \frac{1}{\sqrt{3-2c}} - c \right) \quad \text{при } c = \frac{M_{п\text{л}}}{M_{т}} = \frac{3-\kappa^2}{2}.$$

В практических расчетах видимо более целесообразно величины  $\psi_{н1}$  и  $\Delta \bar{M}_1$  определять численным методом.

### 3.3. ОЦЕНКА СХОДИМОСТИ КОМБИНИРОВАННОГО МЕТОДА

Для оценки сходимости метода упругих решений важно знать как изменяется отношение фактической максимальной пластической деформации к той же деформации, но определяемой из первого приближения метода упругих решений.

Рассмотрим прямоугольное сечение, которое нагружено изгибающим моментом  $M_{пл} = cM_T$ , где  $M_T$  — момент, соответствующий началу фибровой текучести;  $c = f(\epsilon_p)$  — коэффициент, зависящий от степени развития пластических деформаций в сечении. Максимальная фактическая пластическая деформация в крайней фибре

$$\epsilon_{p, \max} = \epsilon_T (\sqrt{(3-2c)^{-1}} - 1).$$

Максимальная пластическая деформация, определяемая из первого приближения метода упругих решений (для диаграммы Прандтля)

$$\epsilon_{p, \max}^{*(1)} = M_{пл} / (EW) - \epsilon_T = \epsilon_T (c - 1).$$

Тогда отношение этих деформаций

$$\alpha = \frac{\epsilon_{p, \max}}{\epsilon_{p, \max}^{*(1)}} = \frac{\sqrt{(3-2c)^{-1}} - 1}{c - 1}. \quad (3.13)$$

Для прямоугольного сечения  $1 \leq c \leq 1,5$ . Исследуем, какие значения получает при этом  $\alpha$ . При  $c = 1$ , раскрывая неопределенность вида  $0/0$ , получим  $\alpha = 1$ ; при  $c > 1$  величина  $\alpha > c > 1$ , а при  $c \rightarrow 1,5$ , значение  $\alpha \rightarrow \infty$ .

Таким образом, получаем, что при  $c > 1$  величина  $\alpha > c$ . Из зависимости  $\alpha = f(c)$  (рис. 3.5) видно, что при значительном развитии пластических деформаций сходимость метода упругих решений может быть медленной. Для улучшения сходимости пластическая деформация, найденная из первого приближения, может быть увеличена по крайней мере в  $c$  раз. На рис. 3.5 отмечены границы максимальных пластических деформаций: 1)  $\epsilon_{p, \max} = 0,0006$  при  $c = 1,25$ , а  $\alpha = 1,65$ ; 2)  $\epsilon_{p, \max} = 0,0025$  при  $c = 1,43$ , а  $\alpha = 3,9$ . В вычислениях  $c$  принято  $\sigma_T = 320$  МПа. На рис. 3.5 показана также функция пластичности А. А. Ильюшина для крайней фибры сечения  $\omega(c) = 1 - \sqrt{3-2c}$ ; при  $c = 1$  значение  $\omega = 0$  (пластические деформации отсутствуют), а при  $c = 1,5$  значение  $\omega = 1$  (пластические деформации в крайней фибре по значению стремятся к бесконечности).

Оценим сходимость метода упругих решений (в трех вариантах) при различных значениях  $\alpha$  для некоторого сечения, состоящего из семи сосредоточенных площадей, соединенных между собой абсолютно жесткой на сдвиг стенкой нулевой толщины (рис. 3.6). Характе-

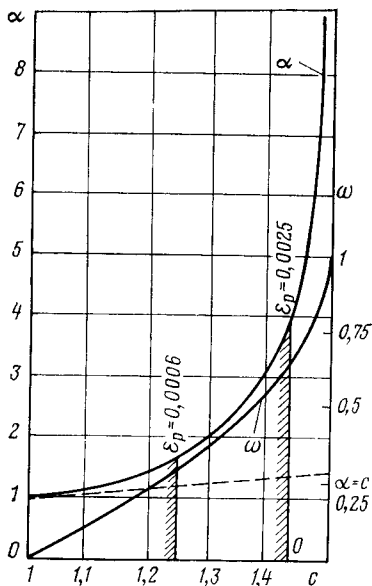


Рис. 3.5. Зависимость безразмерных коэффициентов  $\alpha$  и  $\omega$  от степени  $c$  истощения несущей способности

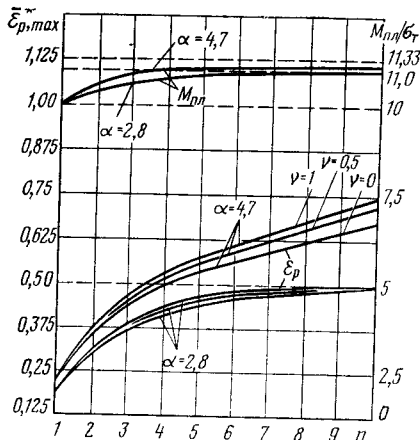


Рис. 3.6. График для оценки сходимости метода упругих решений (А. Ильюшин —  $\nu=0$ , И. Биргер —  $\nu=1$ , автор —  $0 < \nu < 1$ ) по деформациям и усилиям

ристики сечения:  $J = 28 \text{ см}^4$ ;  $Z_{\max} = 3 \text{ см}$ ;  $M_T = 9,333 \sigma_T$ . Рассмотрим случаи: 1)  $\alpha = 2,8$ ;  $\bar{\epsilon}_{p, \max} = \bar{\epsilon}_{p, \max} / \epsilon_T = 0,5$ ;  $\bar{\epsilon}_{\max} = 1,5$ ;  $M_{пл} = 11,0 \sigma_T$ ; 2)  $\alpha = 4,7$ ;  $\bar{\epsilon}_{p, \max} = 1$ ,  $\bar{\epsilon}_{\max} = 2$ ;  $M_{пл} = 11,33 \sigma_T$ .

Диаграмму деформирования принимаем по Прандтлю. Общие деформации в точках сечения

$$\epsilon = \frac{M_{пл} + \Delta \bar{M}_1}{E J \psi_{н1}} z$$

$$\begin{aligned} \text{при } \psi_{н1} &= \frac{1}{J} \int_F \frac{z^2}{1 + \sqrt{\nu} \epsilon_p} dF, \quad \Delta M_1 = \\ &= \sigma_T (1 - \nu) \int_F \frac{\bar{\epsilon}_p z}{1 + \sqrt{\nu} \epsilon_p} dF. \end{aligned}$$

Вычисления проведем для трех случаев:  $\nu = 1$ ;  $\nu = 0$ ,  $\nu = 0,5$ , что соответствует методам переменных параметров упругости  $\psi_{н1}$ , дополнительных нагрузок  $\Delta M$  и комбинированному методу автора  $\psi_{н1}$  и  $\Delta \bar{M}_1$ . Покажем ход вычислений в первых двух приближениях для  $\alpha = 4,7$ ;  $M_{пл} = 113,3 \sigma_T$  (в ньютон-сантиметрах).

Первое приближение  $\bar{\epsilon}_p = 0$ ;  $E_1^* = E$ . Упругие напряжения в точке 3

$$\sigma_3^{*(1)} = \frac{M_{пл}}{J} z_{\max} = \frac{113,3 \sigma_T}{28} 3 = 1,214 \sigma_T$$

в остальных точках напряжения не интересны).

Упругие деформации в точках 3, 2, 1:

$$\epsilon_3^{*(1)} = \frac{\sigma_3^{*(1)}}{E} = 1,214 \frac{\sigma_T}{E}; \quad \epsilon_2^{*(1)} = 0,809 \frac{\sigma_T}{E}; \quad \epsilon_1^{*(1)} = 0,405 \frac{\sigma_T}{E}.$$

Деформации  $\epsilon_2^{*(1)}$  и  $\epsilon_1^{*(1)}$  вычислены, исходя из гипотезы плоских сечений.

По деформациям определяем напряжения в упругопластической стадии в первом приближении в точках 3, 2, 1:

$$\sigma_3^{(1)} = \sigma_T; \quad \sigma_2^{(1)} = 0,809 \sigma_T; \quad \sigma_1^{(1)} = 0,405 \sigma_T.$$

Пластические деформации первого приближения в точках 3, 2, 1

$$\epsilon_{p3}^{(1)} = \epsilon_3^{*(1)} - \frac{\sigma_3^{(1)}}{E} = 0,214 \sigma_T / E; \quad \epsilon_{p2}^{(1)} = \epsilon_{p1}^{(1)} = 0.$$

Изгибающий момент в результате первого приближения (по данным комбинированного метода).

$$M_{пл}^{(1)} = 2 \sigma_T (3 \cdot 1 + 2 \cdot 0,809 + 1 \cdot 0,405) = 10,06 \sigma_T.$$

Во втором приближении на основе пластических деформаций первого приближения вычисляем величины для методов:

1) переменных параметров упругости ( $\nu = 1$ )

$$\psi_n^{(2)} = \frac{2}{J} \left( \frac{3^2}{1,214} + 2^2 + 1^2 \right) = 0,8366;$$

2) дополнительных нагрузок ( $\nu = 0$ )

$$\Delta \bar{M}^{(2)} = 2\sigma_T (0,214 \cdot 3) = 1,285\sigma_T;$$

3) комбинированного ( $\nu = 0,5$ )

$$\psi_{n1}^{(2)} = \frac{2}{J} \left( \frac{3^2}{1,107} + 2^2 + 1^2 \right) = 0,9378;$$

$$\Delta \bar{M}_1^{(2)} = 2\sigma_T (1 - 0,5) \frac{0,214 \cdot 3}{1,107} = 0,5806\sigma_T.$$

Упругие напряжения во втором приближении по рассматриваемым методам:

$$1) \sigma^{*(2)} = E_1^{*(2)} \frac{M_{пл} z}{E J \psi_n^{(2)}} = \frac{1}{1 + \bar{\epsilon}_n^{(1)}} \cdot \frac{M_{пл} z}{J \psi_n^{(2)}};$$

$$2) \sigma^{*(2)} = E_1^{*(2)} \frac{M_{пл} + \Delta \bar{M}^{(2)}}{E J} z = \frac{1}{1 + \bar{\epsilon}_p^{(1)}} \cdot \frac{M_{пл} + \Delta \bar{M}^{(2)}}{J} z;$$

$$3) \sigma^{*(2)} = E_1^{*(2)} \frac{M_{пл} + \Delta \bar{M}_1^{(2)}}{E J \psi_{n1}^{(2)}} z = \frac{1}{1 + \bar{\epsilon}_p^{(1)}} \cdot \frac{M_{пл} + \Delta \bar{M}_1^{(2)}}{J \psi_{n1}^{(2)}} z.$$

С целью сокращения числа вычислений определим сразу деформации по каждому методу по формуле  $\epsilon^{*(2)} = \sigma^{*(2)} / E_1^{*(2)}$  в точках 3, 2, 1:

$$1) \epsilon_3^{*(2)} = 3 \frac{11,33}{28 \cdot 0,8666} \cdot \frac{\sigma_T}{E} = 1,369\sigma_T / E;$$

$$\epsilon_2^{*(2)} = 0,9131\sigma_T / E; \quad \epsilon_1^{*(2)} = 0,4563\sigma_T / E;$$

$$2) \epsilon_{T3}^{*(2)} = 3 \frac{11,33 + 1,285}{28} \cdot \frac{\sigma_T}{E} = 1,352\sigma_T / E;$$

$$\epsilon_2^{*(2)} = 0,9013\sigma_T / E; \quad \epsilon_1^{*(2)} = 0,4507\sigma_T / E;$$

$$3) \epsilon_3^{*(2)} = 3 \frac{11,33 + 0,5806}{28 \cdot 0,9378} \cdot \frac{\sigma_T}{E} = 1,361 \frac{\sigma_T}{E};$$

$$\epsilon_2^{*(2)} = 0,9074\sigma_T / E; \quad \epsilon_1^{*(2)} = 0,4536\sigma_T / E.$$

Пластические деформации имеют место только в точке 3 (см. рис. 3.6), которые по рассматриваемым методам можно считать равными (учитывая, что напряжения в этой точке равны  $\sigma_T$ ):

$$1) \epsilon_{p3}^{(2)} = 0,3696\sigma_T / E; \quad 2) \epsilon_{p3}^{(2)} = 0,3520\sigma_T / E;$$

$$3) \epsilon_{p3}^{(2)} = 0,3611\sigma_T / E.$$

Напряжения в упругопластической стадии во втором приближении легко определить для диаграммы Прандтля по значению деформации при  $\epsilon_p \neq 0$ ,  $\sigma = \sigma_T$ . Общие же формулы для напряжений в

Таблица 3.1

№ приближе- ния, $n$	Значения параметров по методам							
	И. А. Биргера		А. А. Ильющина		Автора ( $\nu=0,5$ )			
	$\Psi_{II}$	$\bar{\varepsilon}_p^*$ тах	$\Delta\bar{M}$	$\bar{\varepsilon}_p^*$ тах	$\Psi_{III}$	$\Delta\bar{M}_1$	$\bar{\varepsilon}_p^*$ тах	$M_{II}^*$
	П р и $\alpha=2,8$							
1	1,0	0,1786	0	0,1786	1,0	0	0,1786	9,925
2	0,9026	0,3058	1,071	0,2934	0,9473	0,4918	0,2997	10,33
3	0,8495	0,3874	1,760	0,3672	0,9162	0,7820	0,3778	10,59
4	0,8205	0,4364	2,203	0,4146	0,8980	0,9533	0,4264	10,75
5	0,8054	0,4646	2,488	0,4451	0,8870	1,054	0,4560	10,85
6	0,7960	0,4805	2,671	0,4647	0,8800	1,114	0,4738	10,91
7	0,7920	0,4893	2,788	0,4773	0,8780	1,149	0,4845	10,95
8	0,7888	0,4941	2,864	0,4854	0,8746	1,170	0,4909	10,97
9	0,7874	0,4968	2,912	0,4906	0,8733	1,182	0,4946	10,98
10	0,7866	0,4982	2,944	0,4939	0,8725	1,190	0,4968	10,99
$\infty$	0,7857	0,50	3,00	0,50	0,8714	1,20	0,50	11,00

П р и  $\alpha=4,7$ 

1	1,0	0,2142	0	0,2142	1,0	0	0,2142	10,06
2	0,8866	0,3696	1,285	0,3520	0,9378	0,5806	0,3611	10,55
3	0,8265	0,4692	2,112	0,4406	0,9017	0,9177	0,4558	10,86
4	0,7947	0,5280	2,643	0,4975	0,8807	1,113	0,5142	11,01
5	0,7726	0,5716	2,985	0,5341	0,8672	1,276	0,5580	11,04
6	0,7582	0,6122	3,296	0,5674	0,8544	1,384	0,5949	11,06
7	0,7360	0,6499	3,584	0,5983	0,8439	1,498	0,6292	11,09
8	0,7208	0,6846	3,852	0,6270	0,8344	1,601	0,6628	11,11
9	0,7075	0,7164	4,100	0,6536	0,8250	1,699	0,6920	11,13
0	0,6956	0,7465	4,331	0,6783	0,8176	1,783	0,7189	11,15
$\infty$	0,6080	1,00	7,320	1,00	0,7450	2,572	1,00	11,33

Примечания: 1. Значение  $M_{II}^*$  вычислено только для комбинированного метода.2. Значения  $M_T=9,333$ ;  $\Delta\bar{M}$  и  $M_{III}$  надо умножить на  $\sigma_T$ .

упругопластической стадии по рассматриваемым методам имеют вид:

$$1) \sigma = \frac{E}{1 + \bar{\varepsilon}_p^{(2)}} \varepsilon^{*(2)}; \quad 2) \sigma = E \varepsilon^{*(2)} - \sigma_T \bar{\varepsilon}_p^{(2)};$$

$$3) \sigma = \frac{E}{1 + \gamma \bar{\varepsilon}_p^{(2)}} \varepsilon^{*(2)} - \frac{E(1-\gamma)}{1 + \gamma \bar{\varepsilon}_p} \varepsilon_p^{(2)}.$$

Подставляя сюда значения деформаций, получим для точки 3:

$$1) \sigma^{(2)} = \frac{E}{1 + 0,3696} \cdot 1,3696 \sigma_T / E = \sigma_T;$$

$$2) \sigma^{(2)} = E \cdot 1,352 \sigma_T / E - \sigma_T \cdot 0,352 = \sigma_T;$$

$$3) \sigma^{(2)} = E \frac{1,361}{1+0,5 \cdot 0,3611} \cdot \frac{\sigma_T}{E} - \frac{E(1-0,5)}{1+0,5 \cdot 0,3611} 0,3611 \frac{\sigma_T}{E} = \sigma_T.$$

По результатам комбинированного метода изгибающий момент, соответствующий второму приближению:

$$M_{пл}^{(2)} = 2\sigma_T (3 \cdot 1 + 2 \cdot 0,9074 + 1 \cdot 0,4537) = 10,55\sigma_T.$$

В третьем приближении вычисления ведем аналогично, при этом в каждый метод подставляем соответствующие (свои) деформации.

Анализ результатов расчетов для первых десяти приближений  $n$  (табл. 3.1, рис. 3.6) показывает, что сходимость метода упругих решений существенным образом зависит от величины  $\alpha$ . Необходимо отметить, что при значениях  $\alpha > 3$  допустимый момент увеличивается незначительно: при  $\alpha = 2,8$ ,  $M_{пл} = 11,0 \sigma_T$ ; при  $\alpha = 4,7$ ,  $M_{пл} = 11,33 \sigma_T$ . Это означает, что несущая способность сечения практически используется полностью при значениях  $\alpha < 3$ . Для изгибающего момента сходимость более быстрая, чем для пластических деформаций. Так при  $\alpha = 4,7$  и  $n = 10$   $M_{пл}^{(10)} = 0,985 M_{пл}$ , а  $\bar{\epsilon}_p^{*(10)} = 0,72 \bar{\epsilon}_p$ . Метод переменных параметров упругости дает более высокую скорость сходимости, чем метод дополнительных нагрузок. Комбинированный метод занимает промежуточное положение между этими методами. При  $\alpha < 3$  все три метода упругих решений дают очень высокую скорость сходимости всех параметров (см. табл. 3.1).

Вопросы сходимости метода упругих решений исследовались с общематематических позиций [15]; при этом указано, что сходимость метода переменных параметров упругости доказана для всех значений функций  $\omega < 1$ , а метода дополнительных нагрузок — для  $\omega < 0,5$ . Сходимость комбинированного метода, по-видимому, лежит в промежутке  $0,5 < \omega < 1$  и зависит от величины  $\nu$ . Однако имеются пути улучшения сходимости метода упругих решений, как например, показано выше, путем увеличения  $\epsilon_p$ , найденного из 1-го приближения.

## 4. ДЕФОРМАЦИОННЫЕ КРИТЕРИИ ЭКСПЛУАТАЦИОННОЙ СПОСОБНОСТИ ПРОЛЕТНЫХ СТРОЕНИЙ

### 4.1. ВИДЫ ДЕФОРМАЦИОННЫХ КРИТЕРИЕВ

Общие требования к мостам коротко можно сформулировать так — обеспечение надежности, удобства эксплуатации, экономичности. Надежность сооружения при проектировании обеспечивается выбором материала и соответствующими методами расчета и конструирования. При этом критерием служит ограниченная повреждае-

мость материала, гарантирующая заданную эксплуатационную прочность. Удобство эксплуатации при движении транспорта по мосту регламентируется нормами жесткости (прогибов) от нормативных (эксплуатационных) и расчетных нагрузок. Экономичность сооружения зависит от выбора системы конструкции и рациональных ее параметров, приводящих к минимальному расходу материала.

Этим требованиям может удовлетворить система деформационных критериев эксплуатационной способности, сформулированных на базе строительной механики. Предлагаются следующие три аналитических деформационных критерия:

1. Интегральный критерий деформативности системы, за который принимают значение дополнительной энергии  $U^*$ , совпадающей для упругой области с потенциальной энергией внутренних сил (энергией деформации). Жесткость системы под заданными нагрузками может характеризоваться величиной  $J = 1/U^*$ .

2. Критерий деформаций (перемещений) узлов и элементов системы  $\Delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i}$ ; по направлению действия силы жесткость  $j = P_i/\Delta_i$ .

3. Местный (физический) критерий интенсивности ограниченной пластической деформации  $\varepsilon_{ip}$  в сечении или точке. Жесткость, например, сечения  $B = EJ\psi$  при  $\psi = f(\varepsilon_{ip})$ .

Рассмотрим более подробно перечисленные критерии.

Интегральный критерий деформативности характеризует поведение системы в целом и связан с энергией системы. Дополнительная энергия

$$U^* = \int_V \left[ \frac{\sigma_0^2}{2K_0} + \int_0^{\sigma_i} (\varepsilon_{ie} + \varepsilon_{ip}) d\sigma_i \right] dV \quad \text{при} \quad K_0 = \frac{E}{3(1-2\mu)}, \quad (4.1')$$

где  $\sigma_0$  — среднее напряжение в точке;  $K_0$  — объемный модуль упругости

Наиболее жесткой при заданном объеме материала является система, обладающая минимальным значением дополнительной энергии. Реальное использование этого критерия возможно при решении задачи рациональной компоновки конструкции, при сравнении различных конструкций с целью оценки их общих свойств.

Рассмотрим пример с изгибаемой балкой в упругой области. Потенциальная энергия внутренних сил

$$U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ} + \int_0^l \frac{Q^2 dx}{2GvF},$$

где  $v$  — коэффициент формы сечения.

Задача определения минимума функционала  $U$  при постоянном объеме  $V$  материала — изопериметрическая задача вариационного исчисления. Поставим задачу определения минимума  $U$  для балки



прямоугольного сечения в зависимости от функции высоты  $h(x)$  балки при постоянной ее ширине  $b$ :

$$U = \int_0^l \Phi(x, h) dx \quad \text{при} \quad V = b \int_0^l h(x) dx = \text{const.}$$

Уравнение Эйлера для рассматриваемого случая имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial h} [\Phi(x, h) - Kh(x)] = 0,$$

где  $K$  — постоянный коэффициент, определяемый из условия неизменности объема материала.

Раскрывая выражение для  $\Phi(x, h)$ , получим

$$\begin{aligned} -\frac{M^2}{2EJ} \cdot \frac{\partial J}{\partial h} - \frac{Q^2}{2GvF} \cdot \frac{\partial F}{\partial h} + K = 0 \quad \text{или} \\ -\frac{36M^2}{2Ebh^4} - \frac{2(1+\mu)Q^2}{2E\gamma bh^2} + K = 0. \end{aligned}$$

Принимая в рассматриваемом примере критерий текучести в отдельных точках  $M/W = R$ ,  $3Q/(2bh) = R_\tau$ , получим

$$R^2 + \frac{8}{9} \cdot \frac{1+\mu}{\nu} R_\tau^2 = \frac{2KE}{b}. \quad (4.2)$$

Данная зависимость характеризует связь между предельными допустимыми нормальными и касательными напряжениями в каждом поперечном сечении балки из условия минимума потенциальной энергии внутренних сил всей балки. Такая балка к тому же обладает максимальной жесткостью по сравнению со всеми другими этого типа.

Таким образом, интегральный критерий деформативности характеризует общие свойства системы и тесно связан с критериями несущей способности материала в сечениях или точках системы.

Критерий деформаций (перемещений) узлов и элементов является одновременно интегральным (по отношению к деформациям в сечении, точке) и дифференциальным (по отношению к энергии) и служит для оценки эксплуатационных качеств сооружения. Жесткость в этом случае определяется по заданным направлениям действия сил (в частности, условно приложенных, единичных).

Местный критерий интенсивности ограниченной пластической деформации является физическим критерием и характеризует, с одной стороны, степень исчерпания несущей способности, а с другой — степень повреждаемости материала при данном напряженно-деформированном состоянии. Жесткость в этом случае служит в том числе и функцией пластической деформации и, например, для прямоугольного сечения и диаграммы Прандтля:

$$B = EJc \sqrt{3-2c} \quad \text{при} \quad c = \frac{3-\kappa^2}{2}; \quad \kappa = \frac{1}{1+E\varepsilon_p/R_H}.$$

Критерий пластической деформации — дифференциальный по отношению к перемещениям узлов и элементов конструкции. Например, для изгибаемой балки.

$$\epsilon_p = \frac{d^2 w}{dx^2} z - \epsilon_e,$$

где  $\epsilon_e$  — упругая деформация в рассматриваемой точке.

Таким образом, рассмотренные три уровня аналитических деформационных критериев всесторонне характеризуют поведение как всей системы, так и отдельных ее элементов, и могут быть использованы при проектировании сооружений. Эти критерии позволяют также с различных позиций оценивать эксплуатационные свойства сооружения.

#### 4.2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КРИТЕРИЯ ОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ДЛЯ РАСЧЕТА ЭЛЕМЕНТОВ

Допуская пластические деформации в расчетах сечений элементов пролетных строений на прочность, целесообразно их форму оставить обычной, что удобно для практических расчетов. Рассмотрим расчет сечения с одной вертикальной осью симметрии при действии изгибающего момента.

Возьмем случай диаграммы деформирования с линейным упрочнением (см. рис. 3.1, б). Она может быть использована для сталей высокой прочности, а также и для обычных в предположении  $\alpha_1 = 0$ . Диаграмма с линейным упрочнением характеризуется следующими параметрами:  $E = \text{tg } \alpha$ ;  $E' = \text{tg } \alpha_1$ ;  $\lambda = 1 - E'/E$  (параметр разупрочнения). Функция пластичности Ильюшина для такой диаграммы:  $\omega = \lambda (1 - \epsilon_T/\epsilon)$ . В пределах упругости зависимость между напряжениями и деформациями:  $\sigma = E\epsilon$ . За пределами упругости эта зависимость выразится так:

$$\sigma = E\epsilon_T + E'(\epsilon - \epsilon_T) = E(\epsilon - \epsilon_p).$$

Отсюда можно получить выражение для деформации:

$$\epsilon_{\max} = \epsilon_T + \epsilon_{p \max}/\lambda.$$

Для того чтобы выразить изгибающий момент в сечении через пластическую деформацию, необходимо рассмотреть распределение деформаций и напряжений в сечении (рис. 4.1, а). Учитывая при этом справедливость гипотезы плоских сечений, имеем

$$\frac{h_{\text{упр}}}{h_{\text{в}}} = \frac{\epsilon_T}{\epsilon_{\max}} \text{ и } h_{\text{упр}} = \kappa_{\sigma} h_{\text{в}} \text{ при } \kappa_{\sigma} = \left(1 + \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\epsilon_{p \max}}{\epsilon_T}\right)^{-1}.$$

Распределение напряжений в сечении следует зависимостям: в упругой зоне  $\sigma_{\text{упр}} = \sigma_T z/h_{\text{упр}}$ ;  
в пластической зоне  $\sigma_{\text{пл}} = \sigma_T [1 + (1 - \lambda)(z/h_{\text{упр}} - 1)]$ .

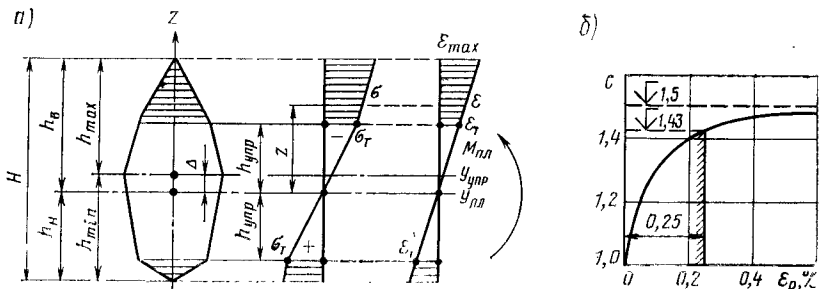


Рис. 4.1. Эпюры и график для сечений в упругопластической стадии при действии нормальных напряжений

Положение нейтральной оси  $y_{пл}$  определяется из условия  $\int \sigma dF = 0$  или

$$\frac{S_{упр}}{h_{упр}} + \frac{1-\lambda}{h_{упр}} (S_{пл}^B + S_{пл}^H) + \lambda (F_{пл}^B - F_{пл}^H) = 0. \quad (4.3)$$

Здесь  $\sigma_T$  — напряжение, соответствующее пределу текучести;  $S_{упр}$  — статический момент упругой зоны относительно оси  $y_{пл}$ ;  $S_{пл}^B$ ,  $S_{пл}^H$ ,  $F_{пл}^B$ ,  $F_{пл}^H$  — статические моменты (относительно оси  $y_{пл}$ ) и площади верхней и нижней пластических зон.

Решая это уравнение для конкретных типов сечений, можно получить величину  $\Delta$  (см. рис. 4.1, а), определяющую положение нейтральной оси  $y_{пл}$  по отношению к центральной оси  $y_{упр}$ . Тогда изгибающий момент в сечении

$$M_{пл} = \int_F \sigma z dF = \sigma_T \left[ W_{упр} + \frac{1-\lambda}{h_{упр}} (J_{пл}^B + J_{пл}^H) + \lambda (S_{пл}^B + S_{пл}^H) \right], \quad (4.4)$$

где  $W_{упр}$  — момент сопротивления упругой зоны относительно оси  $y_{пл}$ ;  $J_{пл}^B$ ,  $J_{пл}^H$  — момент инерции верхней и нижней пластических зон относительно оси  $y_{пл}$ .

В зависимости от величины  $\epsilon_{p\max}$  и параметров сечения имеет место односторонняя текучесть при  $\kappa_\sigma \geq \frac{h_{\min} - \Delta}{h_{\max} + \Delta}$  для случая  $J_{пл}^H = S_{пл}^H = F_{пл}^H = 0$  (см. рис. 41), а двусторонняя при  $\kappa_\sigma \leq \frac{h_{\min} - \Delta}{h_{\max} + \Delta}$ .

Для практических расчетов удобно изгибающий момент в упругопластической стадии представить в виде:

$$M_{пл} = c M_T = c \sigma_T J / h_{\max}, \quad (4.5)$$

$$\text{при } c = \left[ W_{упр} + \frac{1-\lambda}{h_{упр}} (J_{пл}^B + J_{пл}^H) + \lambda (S_{пл}^B + S_{пл}^H) \right] / W_{\min}.$$

где  $M_T$  — момент, соответствующий появлению фибровой текучести;  $J$  — момент инерции исходного сечения;  $W_{\min}$  — наименьший момент сопротивления исходного сечения.

Рассмотрим прямоугольное сечение шириной  $b$  и высотой  $H$ .

Для диаграммы деформирования с упрочнением

$$M_{\text{пл}} = 2EJ \frac{\varepsilon_T}{H_{\text{упр}}} - E\lambda\varepsilon_T \left( \frac{2J}{H_{\text{упр}}} - \frac{bH^2}{4} + \frac{bH_{\text{упр}}^2}{12} \right) \text{ при } H_{\text{упр}} = \kappa_{\sigma} H.$$

Тогда коэффициент

$$c = \frac{3}{2} \lambda + \frac{1-\lambda}{\kappa_{\sigma}} - \frac{1}{2} \lambda \kappa_{\sigma}^2.$$

При  $\lambda = 1$  (диаграмма без упрочнения) имеем  $C = 3/2 - 0,5 k_{\sigma}^2$ , при  $\varepsilon_p \rightarrow \infty$ ,  $\kappa_{\sigma} = 0$  и  $c = 1,5$  (пластический шарнир); при  $\varepsilon_p = 0$ ,  $\kappa_{\sigma} = 1$  и  $c = 1$ .

Аналогично для коробчатых и двутавровых сечений получим:

$$c = \frac{1-\lambda}{\kappa_{\sigma}} + \lambda \frac{3+6a-\kappa_{\sigma}^2}{2+6a} \text{ при } a = \frac{\Sigma F_{\text{пл}}}{\Sigma F_{\text{ст}}},$$

где  $\Sigma F_{\text{пл}}$ ,  $\Sigma F_{\text{ст}}$  — суммарная площадь полок и стенок.

В случае диаграммы Прандтля в полученных формулах необходимо принять  $\lambda = 1$  и

$$\kappa_{\sigma} = (1 + E\varepsilon_{p\text{max}}/\sigma_T)^{-1}.$$

Рассмотрим в качестве примера прямоугольное сечение. Пусть  $\sigma_T = 320$  МПа;  $\varepsilon_{p\text{max}} = 0,25\%$  и  $\lambda = 0,9$ . Производим вычисления:  $k_{\sigma} = \frac{1}{1+2,1 \cdot 10^5 \cdot 0,0025/(0,9 \cdot 320)} = 0,355$ ;  $C = \frac{3}{2} \cdot 0,9 + 0,1/0,355 - 0,5 \cdot 0,9 \cdot 0,355^2 = 1,575$ . Полагая  $\lambda = 1$ , будем иметь  $\kappa_{\sigma} = 0,379$ ;  $c = 3/2 - 0,5 \cdot 0,379^2 = 1,428$ .

Из этого следует, что учет упрочнения в размере  $E'/E = 0,1$  дает несущую способность при изгибе выше на 10% по сравнению с диаграммой Прандтля. Зависимость коэффициента  $c$  от пластической деформации (для диаграммы Прандтля) прямоугольного сечения приведена на рис. 4.1, б.

При действии в сечении неравномерно распределенных касательных напряжений тоже можно допускать ограниченные пластические деформации. Рассмотрим чистый сдвиг при изгибе (рис. 4.2).

Закон изменения деформаций сдвига по высоте сечения принимаем в виде  $\gamma = \gamma_{\text{max}} (1 - \bar{a}\beta^2)$  при  $\gamma_{\text{max}} = \gamma_T + \gamma_{p\text{max}}$ ,  $\beta = z/h$ , где  $\bar{a}$  — отношение статического момента площади половины высоты стенки к статическому моменту половины сечения (в общем случае  $\bar{a} = (\bar{\gamma}_{\text{max}} - \bar{\gamma}_{\text{min}})/\bar{\gamma}_{\text{max}}$ , причем  $\bar{\gamma}_{\text{max}}$  и  $\bar{\gamma}_{\text{min}}$  определяем для упругой стадии). Пластические деформации

$$\gamma_p = \gamma_{\text{max}} (1 - \bar{a}\beta^2) - \gamma_T,$$

где  $\gamma_T$  — отвечающая пределу текучести угловая деформация при сдвиге.

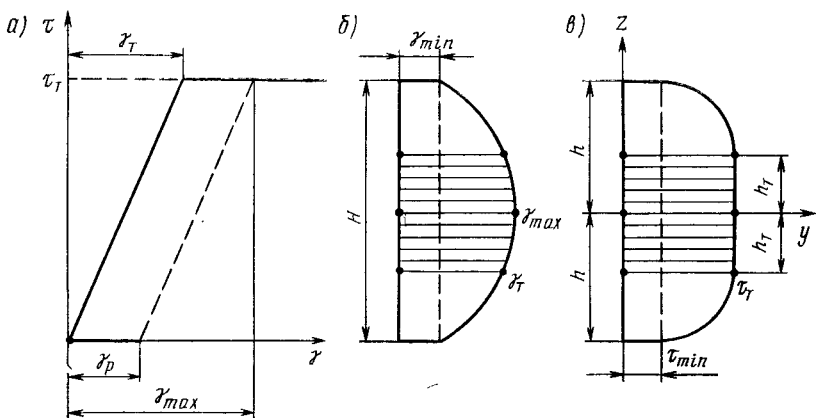


Рис. 4.2. График и эпюры для сечений в упругопластической стадии при действии касательных напряжений

Граница между упругой и пластической зонами определяется высотой

$$h_{\text{пл}} = \kappa_{\tau} h \text{ при } \kappa_{\tau} = \sqrt{\frac{G\bar{\gamma}_p}{\bar{a}(\tau_T + G\bar{\gamma}_p)}}.$$

Значения допустимых поперечных сил в случае диаграммы Прандтля и прямоугольного сечения находятся из формул ( $Q_{\text{пл}} = \int \tau dF$ ):

$$Q_{\text{пл}} = \frac{2}{3} hb (\tau_{\text{min}} + 2\tau_T + 2G\bar{\gamma}_p - 2G\bar{\gamma}_p \kappa_{\tau}) \quad (4.6)$$

$$\text{при } \tau_{\text{min}} = G(\gamma_T + \bar{\gamma}_p)(1 - \bar{a}) \leq \tau; \quad \bar{\gamma}_p = \bar{\gamma}_{p \text{ max}} (1 - \bar{\tau}_{\text{min}}/\bar{\tau}_{\text{max}}),$$

где  $h$  — половина высоты стенки;  $b$  — толщина стенки;  $\bar{\tau}_{\text{min}}$ ,  $\bar{\tau}_{\text{max}}$  — значения касательных напряжений в упругой стадии работы сечения.

Проверка на прочность:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{QS_{\text{бр}}}{J_{\text{бр}} b} \leq c' R_{\tau} \text{ при } R_{\tau} = \frac{R}{\sqrt{3}}, \quad c' = 1 + \frac{2G\bar{\gamma}_p(1 - \kappa_{\tau})}{\tau_{\text{min}} + 2\tau_T} \quad (4.7)$$

Рассмотрим пример:  $R_{\tau} = \tau_T \approx 0,6R = 0,6 \cdot 320 = 192$  МПа;  $\tau_{\text{min}} = 0$ ;

$$\kappa_{\tau} = \sqrt{\frac{0,0040 \cdot 84000}{192 + 0,0040 \cdot 84000}} = 0,80.$$

Коэффициент увеличения расчетного сопротивления

$$c' = 1 + \frac{2 \cdot 84000 \cdot 0,0040 (1 - 0,80)}{2 \cdot 192} = 1,35.$$

Полное условное расчетное сопротивление  $c' R_{\tau} = 192 \cdot 1,35 = 259$  МПа.

### 4.3. ОЦЕНКА ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ КАЧЕСТВ ПРОЛЕТНЫХ СТРОЕНИЙ

Критерий пластической деформации в поперечных сечениях пролетного строения — исходный для определения допустимых усилий в элементах. По условиям эксплуатации могут накладываться ограничения на перемещения узлов и элементов пролетного строения. Таким образом, требуется определять, какие перемещения в конструкции соответствуют пластическим деформациям, допущенным в отдельных элементах. Для этого следует использовать деформационный критерий по перемещениям (критерий 2-го уровня), который служит интегральным по отношению к критерию пластической деформации. Этим интегральным критерием, например, для изгибаемых балок, может служить максимальный относительный остаточный прогиб.

Рассмотрим вопрос о полных и остаточных прогибах для изгибаемых элементов пролетных строений мостов. При этом пластическая деформация в наиболее напряженных сечениях принимается в границах  $\epsilon_p = 0,0006 \div 0,0025$ . Перемещения (например, прогибы) сечений балок в упругопластической стадии могут быть найдены по формуле Мора

$$w = \sum \int \bar{M} \frac{1}{\rho} dx = \sum \int \frac{\bar{M} M_{пл}}{EJ \psi_{и}} dx,$$

где  $\bar{M}$  — момент от единичной нагрузки, приложенной в направлении искомого перемещения;  $M_{пл} = cM_T$  — момент от внешней нагрузки ( $M_T$  — момент, соответствующий началу текучести в крайней фибре);  $\psi_{и}$  — Функция пластичности для сечения, переменная по длине балки.

Возьмем балку постоянного сечения на двух шарнирных опорах и нагруженную сосредоточенной силой  $P$  в середине пролета. Сечение балки — симметричное, коробчатое. Определим прогиб балки под силой (в середине пролета).

Изгибающий момент в каком-либо сечении балки от внешней нагрузки  $M = 0,5 Px$ . Для удобства введем новую переменную интегрирования  $x = 2M/P$ ; тогда  $dx = 2P^{-1}dM$ . Изгибающий момент от единичной силы  $\bar{M} = x/2$  или  $\bar{M} = M/P$  с учетом новой переменной. Для заданного поперечного сечения

$$\frac{M_{пл}}{\psi_{и}} = \frac{M_T}{\sqrt{3 + 6a - 2c(1 + 3a)}},$$

где  $a = \Sigma F_{п} / \Sigma F_{ст}$  — отношение площади всех верхних и нижних полок к площади всех стенок [47].

Область интегрирования (с учетом симметрии) разделяем на два участка — упругий  $0 \leq M \leq M_T$  и упругопластический  $M_T \leq M_{пл} \leq M_{max}$ . Тогда прогиб в середине пролета

$$w = 2 \int_0^{M_T} \frac{M}{EJ} \cdot \frac{M}{P} \cdot \frac{2dM}{P} +$$

$$+2 \int_{M_T}^{M_{\max}} \frac{M_T}{EJ \sqrt{3+6a-2c(1-3a)}} \cdot \frac{M}{P} \cdot \frac{2dM}{P}$$

при  $M_{\max} = cP_T l/4$ ,  $P_T = 4M_T/l$ ,  $P = cP_T$ .

После интегрирования и преобразований получим

$$\omega = \omega_T \frac{1}{c^2} \left[ 1 + \frac{4+9a}{(1+3a)^2} - \frac{c(1+3a) + (3+6a)}{(1+3a)^2} \times \right. \\ \left. \times \sqrt{3+6a-2c(1+3a)} \right] \text{ при } \omega_T = P_T l^3 / (48EJ), \quad (4.8)$$

где  $\omega_T$  — прогиб, соответствующий началу текучести в крайней фибре поперечного сечения в середине пролета балки.

Для прямоугольного сечения  $a = 0$ ; формула (4.8) совпадает с решением Н. Н. Малинина [28].

Исследуем полученное выражение для прогиба. Введем безразмерные прогибы:  $\bar{\omega} = \omega/\omega_T$  — для общего прогиба;  $\bar{\omega}_{\text{ост}} = \omega_{\text{ост}}/\omega_T$  — для остаточного прогиба. Остаточный прогиб

$$\omega_{\text{ост}} = \omega - \omega_{\text{раз}} = \omega - c\omega_T. \quad (4.9)$$

Соответствующие зависимости для однопролетной балки прямоугольного ( $a = 0$ ) и коробчатого ( $a$  — переменное) сечений даны на рис. 4.3. Влияние переменности параметра  $a$  на значение коэффициента  $c_{\max}$  можно оценивать по графику (рис. 4.4). Анализируя эти зависимости, рассмотрим полные и остаточные прогибы, возникающие в балке, нагруженной с о с р е д о т о ч е н н о й силой.

Ограниченному развитию пластических деформаций в сечении соответствуют определенные прогибы. Так, если в крайней фибре на более напряженного сечения допускается пластическая деформация  $\epsilon_p = 0,0006$ , прогибы  $\omega = 1,28 \omega_T$ ;  $\omega_{\text{ост}} = 0,03 \omega_T$ ; при пластической деформации  $\epsilon_p = 0,0025$ , получим  $\omega = 1,63 \omega_T$ ;  $\omega_{\text{ост}} = 0,2 \omega_T$ .

При  $\omega_T = 1/400$  остаточный прогиб в рассмотренном примере изменяется в пределах  $(1/13300 \div 1/2000) l$ .

Оценим полный и остаточный относительные прогибы в середине пролета балки при равномерно р а с п р е д е л е н н о й нагрузке.

При пластической деформации  $\epsilon_p = 0,0006$  прогибы  $\omega = 1,31 \omega_T$ ;  $\omega_{\text{ост}} = 0,06 \omega_T$ ; при пластической деформации  $\epsilon_p = 0,0025$  прогибы  $\omega = 1,975 \omega_T$ ;  $\omega_{\text{ост}} = 0,545 \omega_T$ .

При  $\omega_T = 1/400$  остаточный прогиб в случае равномерно распределенной нагрузки изменяется в пределах  $(1/6670 \div 1/735) l$ .

Вычислим полные и остаточные прогибы для различных элементов полетных строений при пластических деформациях  $\epsilon_p$  в сечении, равных 0,0006, и 0,0025 для стали 10ХСНД с пределом текучести  $\sigma_T = 350 \text{ МПа}$  и стали 16 Д при  $\sigma_T = 210 \text{ МПа}$ .

Относительные упругие прогибы  $\omega_T/l$ , соответствующие достижению в наиболее напряженном волокне предела текучести  $\sigma_T$ , определяем по формулам:

1) для сосредоточенной силы, приложенной в середине пролета разрезной балки:

$$\omega_T/l = \sigma_T l / (12 E z),$$

где  $z$  — расстояние от нейтральной оси до наиболее напряженного волокна;

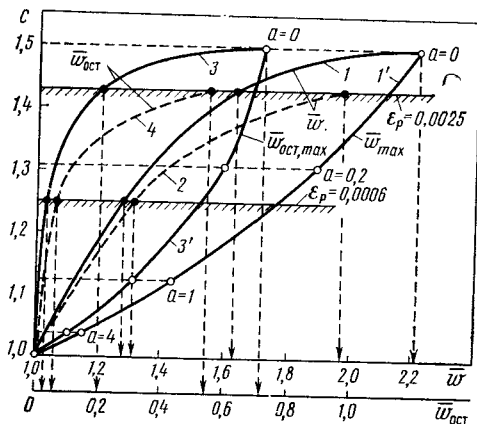


Рис. 4.3. Зависимости между прогибами в середине пролета и коэффициентом  $c$ , характеризующем степень развития пластических деформаций:

1 — полный прогиб,  $a=0$ , нагрузка в середине пролета; 1' — максимальные полные прогибы при различных значениях  $a$ , нагрузка в середине пролета; 2 — полный прогиб,  $a=0$ , нагрузка равномерно распределенная; 3 — остаточный прогиб,  $a=0$ , нагрузка в середине пролета; 3' — максимальные остаточные прогибы при различных значениях  $a$ , нагрузка в середине пролета; 4 — остаточный прогиб,  $a=0$ , нагрузка равномерно распределенная

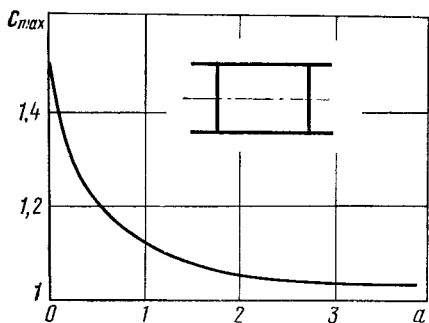


Рис. 4.4. Зависимость коэффициента  $c_{max}$  от геометрического параметра  $a$  сечения

2) для равномерно распределенной нагрузки, действующей на всей длине разрезной балки;

$$\omega_T/l = \sigma_T l / (9,6 E z).$$

Результаты вычислений для некоторых конкретных поперечных сечений и типов элементов пролетных строений приведены в табл. 4.1. Эти данные нужно рассматривать как ориентировочные, но позволяющие сделать весьма определенные выводы:

для сталей с более высоким пределом текучести остаточные прогибы получаются большими по сравнению со сталями менее прочными;

остаточные прогибы элементов, работающих на местную нагрузку (продольные балки), на порядок меньше остаточных прогибов всего пролетного строения при пластической деформации  $\epsilon_p = 0,0025$ ;

элементы конструкции проезжей части, имеющие значительный пролет, например, поперечные балки ортотропной плиты, могут получать остаточные прогибы одного порядка с прогибами пролетного строения при  $\epsilon_p = 0,0025$ ;



Элементы пролетного строения	Прогибы полные $w/l$ и остаточные $w_{ост}/l$ для пластических деформаций							
	$\Sigma p = 0,0006$				$\Sigma p = 0,0025$			
	$w/l$		$w_{ост}/l$		$w/l$		$w_{ост}/l$	
	10XСНД	16Д	10XСНД	16Д	10XСНД	16Д	10XСНД	16Д
Продольные ребра ( $l=2,5$ м) ортотропной плиты	$\frac{1}{450}$	$\frac{1}{750}$	$\frac{1}{13200}$	$\frac{1}{32000}$	$\frac{1}{350}$	$\frac{1}{590}$	$\frac{1}{2900}$	$\frac{1}{4850}$
Продольные балки ( $l=11$ м) сквозных пролетных строений под железную дорогу	$\frac{1}{330}$	$\frac{1}{560}$	$\frac{1}{3300}$	$\frac{1}{5500}$	$\frac{1}{300}$	$\frac{1}{500}$	$\frac{1}{1900}$	$\frac{1}{3100}$
Поперечные балки ( $l=20$ м) ортотропной плиты	$\frac{1}{80}$	$\frac{1}{130}$	$\frac{1}{1700}$	$\frac{1}{2800}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{85}$	$\frac{1}{190}$	$\frac{1}{310}$
Пролетное строение ( $l=100$ м) со сплошной стенкой	$\frac{1}{130}$	$\frac{1}{220}$	$\frac{1}{2900}$	$\frac{1}{4800}$	$\frac{1}{90}$	$\frac{1}{150}$	$\frac{1}{320}$	$\frac{1}{530}$

Примечание: Для продольных ребер нагрузка принята сосредоточенной в середине пролета, а для остальных случаев — равномерно распределенной.

остаточные прогибы элементов пролетных строений, соответствующие наступлению предельного состояния ИБ при  $\epsilon_p = 0,0025$ , не являются по своей значимости катастрофическими и могут позволить, в случае необходимости, эксплуатацию сооружения с некоторыми ограничениями;

при пластической деформации в размере 0,0006 остаточные прогибы практически не сказываются на эксплуатационных качествах пролетного строения.

#### 4.4. ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ ПРИНЦИПА СОВМЕЩЕНИЯ ФУНКЦИЙ ЭЛЕМЕНТАМИ СООРУЖЕНИЙ

Энергетические представления имеют фундаментальное значение в теории сооружений. С одной стороны, они служат основаниями вариационных методов и принципов расчета, а с другой — определяют пути получения эффективных конструктивных форм. Упругая конструкция под действием внешних воздействий деформируется так, что при этом совершается минимальная работа. Обычно применительно к нагруженной конструкции интересуются ее несущей способностью и жесткостью. Оба вопроса в принципе связаны с энергией системы.

Наиболее рациональной следует считать такую конструкцию, в которой при заданном объеме материала накапливается минимальная потенциальная энергия. Более того, нужно стремиться к тому, чтобы удельная потенциальная энергия во всех точках системы имела примерно одинаковое значение. При объединении отдельных подсистем (подконструкций) в единую систему потенциальная энергия уменьшается. Однако необходимо знать правила, следуя которым при объединении подсистем, можно было бы получить конструкцию максимальной жесткости, т. е. обладающую минимальным значением потенциальной энергии. Последнее тесно связано с принципом совмещения функций элементами сооружений, введенном Н. С. Стрелецким [51]. Здесь речь идет о наиболее полном использовании прочностных свойств материала, а также проблеме создания систем повышенной жесткости.

Принцип совмещения функций, реализованный, например, в железнодорожных сквозных пролетных строениях, решает в известной степени оба этих вопроса.

В традиционных конструкциях пролетных строений балочная клетка работает только на восприятие местных нагрузок, так как она не включена (специальными мерами) в совместную работу с главными фермами. Чтобы уменьшить изгиб поперечных балок в горизонтальной плоскости устраивали для этого разрывы (стыки) продольных балок, что ухудшало эксплуатационные качества пролетных строений. Объединение конструкций проезжей части с главными фермами дает ряд преимуществ как для стадии эксплуатации, так и монтажа. Реализация принципа совмещения функций в более широком плане требует теоретических разработок как в области пространственных расчетов, так и критериев оценки системы, для которых оказываются полезными энергетические представления. Для решения рассмотренных задач могут оказаться полезными некоторые общие методы и подходы.

Поставим такую задачу. Какие изменения произойдут в системе, если к некоторой конструкции (телу) объемом  $V$  присоединить подконструкцию (объем материала  $\Delta V$ )? Рассмотрим три состояния тела.

Первое состояние — исходное (рис. 4.5, а). Внешние распределенные силы с составляющими  $X_0, Y_0, Z_0$  приложены на площадке  $F_0$ . При этом в теле устанавливается некоторое деформированное состояние. Наметим будущую площадку контакта  $\Delta F$  на которой перемещения обозначим через  $u, v, w$ . Потенциальная энергия в первом состоянии

$$U = \frac{1}{2} \int_{F_0} (X_0 u_0 + Y_0 v_0 + Z_0 w_0) dF_0. \quad (4.10)$$

Разгрузим систему и по площадке контакта  $\Delta F$  присоединим новый элемент объемом  $\Delta V$ . За второе состояние (рис. 4.5, б) примем новую систему с присоединенным элементом, нагруженную теми же

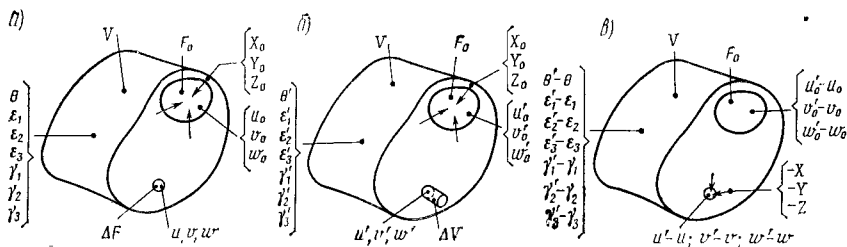


Рис. 4.5. Три состояния тела

силами  $X_0, Y_0, Z_0$ . Деформации и перемещения этого состояния в общем случае отличны от первого состояния. Потенциальная энергия второго состояния

$$U' = \frac{1}{2} \int_{F_0} (X_0 u'_0 + Y_0 v'_0 + Z_0 w'_0) dF_0. \quad (4.11)$$

Между присоединенным элементом и телом возникают силы взаимодействия, которые обозначим  $X, Y, Z$ . Потенциальная энергия присоединенного объема

$$\Delta U_{\Delta V} = \frac{1}{2} \int_{\Delta F} (Xu' + Yv' + Zw') dF. \quad (4.12)$$

В качестве третьего состояния (рис. 4.5, в) рассмотрим исходную систему, но только под действием сил  $-X, -Y, -Z$ , т. е. сил взаимодействия. Перемещения и деформации в этом состоянии определяются как разность соответствующих значений второго и первого состояний. После этого можно вычислить приращение потенциальной энергии за счет введения нового элемента:

$$\Delta U = U' - U = -\frac{1}{2} \int_{F_0} [X_0 (u'_0 - u_0) + Y_0 (v'_0 - v_0) + Z_0 (w'_0 - w_0)] dF_0.$$

Далее, рассматривая состояния первое и третье и используя принцип взаимности работ, можно записать:

$$\begin{aligned} - \int_{F_0} [X_0 (u'_0 - u_0) + Y_0 (v'_0 - v_0) + Z_0 (w'_0 - w_0)] dF_0 &= \\ &= - \int_{\Delta F} (Xu + Yv + Zw) dF. \end{aligned}$$

Окончательно получим для приращения потенциальной энергии

$$\Delta U = -\frac{1}{2} \int_{\Delta F} (Xu + Yv + Zw) dF. \quad (4.13)$$

Таким образом, присоединение к системе нового элемента уменьшает потенциальную энергию. Это уменьшение тем больше, чем больше перемещения в исходной системе на площадке контакта, а также чем больше силы взаимодействия между присоединенным элементом и системой. Отсюда даются практические выводы для проектирования конструкций. В частности, устанавливаются области (точки) включения конструкции проезжей части в совместную работу с главными несущими конструкциями. Необходимо стремиться получить систему с наименьшей потенциальной энергией, что позволит дать конструкцию максимальной жесткости.

Для дальнейшего анализа преобразуем поверхностные интегралы для приращений потенциальной энергии  $\Delta U_{\Delta V}$  и  $\Delta U$  в объемные. Тогда потенциальная энергия присоединенного элемента [87]

$$\Delta U_{\Delta V} = \frac{1}{2} G \int_{\Delta V} \left[ \frac{2\mu}{1-2\mu} \theta'^2 + 2(\varepsilon_1'^2 + \varepsilon_2'^2 + \varepsilon_3'^2) + (\gamma_1'^2 + \gamma_2'^2 + \gamma_3'^2) \right] dV = \frac{1}{2} \int_{\Delta V} W' dV, \quad (4.14)$$

где  $G$  — модуль сдвига материала;  $W'$  — удельная потенциальная энергия в точке элемента.

За счет введения нового элемента можно получить для приращения потенциальной энергии системы

$$\Delta U = -\frac{1}{2} G \int_{\Delta V} \left[ \frac{2\mu}{1-2\mu} \theta\theta' + 2(\varepsilon_1 \varepsilon_1' + \varepsilon_2 \varepsilon_2' + \varepsilon_3 \varepsilon_3' + \gamma_1 \gamma_1' + \gamma_2 \gamma_2' + \gamma_3 \gamma_3') \right] dV \quad (4.15)$$

$$\text{или } \Delta U = -\frac{1}{2} G \int_V \left\{ \frac{2\mu}{1-2\mu} \theta(\theta - \theta') + 2[\varepsilon_1(\varepsilon_1' - \varepsilon_1) + \varepsilon_2(\varepsilon_2' - \varepsilon_2) + \varepsilon_3(\varepsilon_3' - \varepsilon_3)] + [\gamma_1(\gamma_1' - \gamma_1) + \gamma_2(\gamma_2' - \gamma_2) + \gamma_3(\gamma_3' - \gamma_3)] \right\} dV. \quad (4.16)$$

Если объем нового элемента  $\Delta V$  достаточно мал, то

$$\frac{dU}{dV} = -\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta V} = -\frac{1}{2} W,$$

где  $W$  — удельная потенциальная энергия в точке исходной системы.

Тогда приращение потенциальной энергии системы

$$\Delta U \approx -0,5W\Delta V. \quad (4.17)$$

Таким образом, при присоединении к системе нового элемента достаточно малого объема уменьшение потенциальной энергии тем больше, чем больше удельная потенциальная энергия исходной системы в точках на площадке контакта. Подобным образом можно показать, что при малом  $\Delta V$  имеем

$$\Delta U \approx -0,5W'\Delta V. \quad (4.18)$$

Зависимости (4.15), (4.16) также указывают пути получения системы с минимальной потенциальной энергией при добавлении к ней новых элементов.

Таким образом рассмотрен случай, когда к исходной системе присоединяли дополнительный материал и потенциальная энергия новой системы уменьшалась.

При удалении из исходной системы некоторых объемов материала потенциальная энергия новой системы будет увеличиваться, а характер выявленных выше зависимостей сохранится. В частности, при достаточной малой величине  $\Delta V$  имеем

$$\Delta U \approx 0,5W' \Delta V \approx 0,5W\Delta V. \quad (4.19)$$

Остановимся на одном следствии, вытекающем из изложенного и касающемся преобразования системы при постоянном объеме материала.

Если в системе есть такие две точки 1 и 2, для которых удельная потенциальная энергия в их окрестностях подчиняется неравенству  $W_1 > W_2$ , то перенос достаточно малого объема материала из точки 2 в точку 1 уменьшает потенциальную энергию системы. Здесь речь идет о выравнивании удельной потенциальной энергии системы во всех точках. Соответственно для данного объема материала система будет иметь минимальную потенциальную энергию, когда во всех точках удельная потенциальная энергия одинакова.

Изложенное относится к упругой стадии работы материала.

Для материала, обладающего идеальной пластичностью, из энергетических соображений вытекает ряд следствий [20]: 1) добавление материала к телу не может понизить предельную нагрузку; 2) удаление материала не может повысить предельную нагрузку; 3) увеличение предела текучести в некоторых частях тела не может понизить предельную нагрузку.

## **5. ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТОВ ПРОЛЕТНЫХ СТРОЕНИЙ С УЧЕТОМ ОГРАНИЧЕННЫХ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ**

### **5.1. РАСЧЕТ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ ОДНОВРЕМЕННОМ ДЕЙСТВИИ НОРМАЛЬНЫХ И КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ**

В расчетах сечений стальных элементов пролетных строений целесообразно пользоваться зависимостями между напряжениями и деформациями, вытекающими из общих уравнений теории пластичности. Практический интерес представляет случай одновременного действия в сечении нормальных  $\sigma_x$  и касательных  $\tau_{zx}$  нап-

ражений. Принимая остальные составляющие напряжений равными нулю, а также  $\mu = 0,5$ , получим:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \alpha; \quad \tau_{zx} = \frac{1}{3} E \gamma_{zx} \alpha; \quad \alpha = \frac{1}{1 + E \varepsilon_{ip} / \sigma_i}; \quad \sigma_i = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{zx}^2};$$

$$\varepsilon_i = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \frac{1}{3} \gamma_{zx}^2}.$$

При  $\varepsilon_{ip} \neq 0$  имеем  $\sigma_i = E \varepsilon_T$  — для диаграммы Прандтля и  $\sigma_i = E[\varepsilon_T - \varepsilon_{ip}(1 - 1/\lambda)]$  — для диаграммы с линейным упрочнением.

Расчет сечений при одновременном действии нормальных и касательных напряжений представляет довольно сложную задачу. Например, если попытаться по аналогии с формулой Журавского получить формулу для касательных напряжений при изгибе из вы-

ражения  $\tau_{zx} = \int_z^{0,5h} \frac{\partial \sigma}{\partial x} dz$ , то возникают большие трудности в по-

лучении значений  $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}$ , так как в сечениях по длине элемента развитие пластичности неодинаково, а следовательно, и распределение напряжений различно. В упругой области величина  $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}$  — это извест-

ная функция, например, изгибающего момента  $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = f_1(M)$ , а в упругопластической  $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}$  — сложная функция изгибающего мо-

мента, поперечной силы и пластической деформации, т. е.  $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = f_2(M, Q, \varepsilon_{ip})$ . Поэтому при расчетах в упругопластической стадии целесообразно принимать во внимание те или иные кинематические гипотезы о характере распределения деформаций в сечении. Для этого можно с успехом использовать результаты решений в упругой стадии.

Значительно возрастает роль подобных методов, когда эти гипотезы (законы) устанавливаются из чисто геометрических соображений, как например, при чистом изгибе, чистом кручении недеформирующихся сечений и т. д.

Здесь речь идет о получении приближенных решений, необходимых для инженерных расчетов, роль которых особенно велика для нормативных документов.

Образование пластического шарнира при одновременном действии в сечении нормальных и касательных напряжений рассмотрено Б. М. Броуде [11].

Для диаграммы Прандтля зависимости между напряжениями и деформациями принимают вид:

$$\sigma_x = \varepsilon_x \frac{\sigma_T}{\varepsilon_T + \varepsilon_p}; \quad \tau_{zx} = \gamma_{zx} \frac{\sigma_T}{3(\varepsilon_T + \varepsilon_p)},$$

где  $\varepsilon_x$  и  $\gamma_{zx}$  — деформации растяжения (сжатия) и сдвига в рассматриваемой точке;  $\varepsilon_p$  — значение пластической деформации в той же точке.

Пусть в сечении действуют нормальные и касательные напряжения, которые вызывают соответствующие деформации (рис. 5.1) Как и в упругой стадии, считаем справедливой гипотезу плоских сечений. Соответственно по высоте сечения распределение деформаций

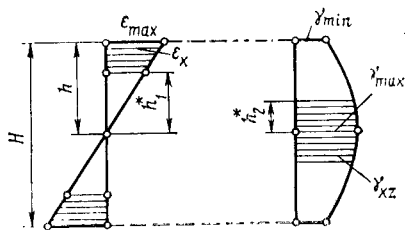


Рис. 5.1. Эпюры деформаций

$\varepsilon_x = \beta \varepsilon_{\max}$ ;  $\gamma_{xz} = \gamma_{\max} (1 - a\beta^2)$  при  $\beta = h^*/h$ ,  $a = (\gamma_{\max} - \gamma_{\min})/\gamma_{\max}$ , где  $h^*$  — ордината положения точки по высоте.

Для  $\mu = 0,5$  интенсивность деформаций в точке сечения

$$\varepsilon_i = \left[ (\beta \varepsilon_{\max})^2 + \frac{1}{3} \gamma_{\max}^2 (1 - a\beta^2)^2 \right]^{1/2}.$$

Из условия  $\varepsilon_{i\max} = \varepsilon_T + \varepsilon_{p\max}$  при заданном отношении  $\kappa = \varepsilon_{\max}/\gamma_{\max}$  находят значения  $\varepsilon_{\max}$  и  $\gamma_{\max}$ . При определении  $\kappa$  рассматривают работу сечения в момент начала текучести. Пластическая деформация в любой точке  $\varepsilon_p = \varepsilon_i - \varepsilon_T \geq 0$ . Для определения границы между упругой и пластической областями при  $\beta_1 = h_1^*/h$ ,  $\beta_2 = h_2^*/h$  используют условие  $\varepsilon_i = \varepsilon_T$ .

Так как деформации  $\varepsilon_x$  по высоте сечения распределяются по линейному закону, будем иметь

$$\frac{\varepsilon_{\max}}{h} = \frac{\varepsilon_{xT}}{h_{\text{упр}}} \text{ при } \varepsilon_{xT} = \left[ \varepsilon_T^2 - \frac{1}{3} \gamma_{\max}^2 (1 - a\beta^2)^2 \right]^{1/2}.$$

Раскрывая это выражение и преобразуя его, получим

$$\beta^4 + \beta^2 \left( \frac{3\varepsilon_{\max}^2}{a^2 \gamma_{\max}^2} - \frac{2}{a} \right) = \frac{3\varepsilon_T^2}{a^2 \gamma_{\max}^2} + \frac{1}{a^2} = 0.$$

Решение этого уравнения дает

$$\beta_{1,2} = \left\{ \frac{1}{a} - \frac{3}{2} \left( \frac{\varepsilon_{\max}}{a\gamma_{\max}} \right)^2 \pm \frac{\varepsilon_{\max}}{2a\gamma_{\max}} \left[ \left( \frac{3\varepsilon_{\max}}{a\gamma_{\max}} \right)^2 - 12 \left( \frac{1}{a} - \frac{\varepsilon_T^2}{\varepsilon_{\max}^2} \right) \right]^{1/2} \right\}^{1/2}. \quad (5.1)$$

Представляет интерес случай, при котором касательные напряжения и деформации сдвига распределены по высоте сечения по параболе. Пусть задано отношение  $\varepsilon_{\max}/\gamma = k$ , причем  $\gamma < \gamma_T$ ; материал подчиняется диаграмме Прандтля. Допуская в крайней точке интенсивность деформации  $\varepsilon_{i\max} = \sqrt{\varepsilon_{\max}^2 + \frac{1}{3} \gamma^2}$ , можно

определить значения деформации:

$$\varepsilon_{\max} = \kappa (\varepsilon_T + \varepsilon_{ip \max}) \sqrt{\frac{1}{\kappa^2 + 1/3}}; \quad \gamma = (\varepsilon_T + \varepsilon_{ip \max}) \sqrt{\frac{1}{\kappa^2 + 1/3}}.$$

Учитывая, что  $\varepsilon_x = \varepsilon_{\max} z/h$  и  $\gamma = \text{const}$  (где  $h$  — половина высоты сечения), высота упругой зоны от нейтральной оси

$$\beta = \frac{h_{\text{упр}}}{h} = \frac{1}{\varepsilon_{\max}} \sqrt{\varepsilon_T^2 - \frac{1}{3} \gamma^2}. \quad (5.2)$$

Интенсивность пластической деформации в каждой точке

$$\varepsilon_{ip} = \varepsilon_l - \varepsilon_T = \sqrt{\left(\frac{z}{h} \varepsilon_{\max}\right)^2 + \frac{1}{3} \gamma^2} - \varepsilon_T.$$

Напряжения в областях развития пластических деформаций:

$$\sigma_{\text{пл}} = \frac{\sigma_T}{\sqrt{1 + \frac{1}{3} (\gamma/(\varepsilon_{\max} \beta))^2}}; \quad \tau_{\text{пл}} = \frac{\sigma_T}{3 \sqrt{\frac{1}{3} + (\varepsilon_{\max} \beta/\gamma)^2}}; \quad (5.3)$$

Дальнейшие упрощения возможны, если принять равномерное распределение касательных напряжений по высоте при условии, что они прилагаются после нормальных напряжений и остаются по значению неизменными, т. е.

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{Q}{F} = \text{const}; \quad \gamma_{\text{ср}} = \frac{Q}{FG} \quad \text{при } F = bH.$$

Максимальная деформация в крайней фибре

$$\varepsilon_{\max} = \sqrt{\varepsilon_T^2 - 3 \left(\frac{G}{E} \gamma\right)^2} + \varepsilon_p.$$

Граница между упругой и пластической зонами.

$$h_{\text{упр}} = \frac{h}{\varepsilon_{\max}} \sqrt{\varepsilon_T^2 - 3 \left(\frac{G}{E} \gamma\right)^2}. \quad (5.4)$$

Переходя к напряжениям, это же выражение запишем в форме

$$h_{\text{упр}} = h \frac{\sigma_{\text{хт}}}{\sigma_{\text{хт}} + E\varepsilon_p}, \quad \text{при } \sigma_{\text{хт}} = \sqrt{\sigma_T^2 - 3\tau^2}. \quad (5.5)$$

Из выражения (5.5) следует формула для коэффициента  $\kappa_{\sigma\tau} = \sigma_{\text{хт}}/(\sigma_{\text{хт}} + E\varepsilon_p)$ , которая учитывает влияние касательных напряжений. Анализ этой формулы показывает, что с увеличением касательных напряжений пластическая область увеличивается при неизменной  $\varepsilon_p$ .



Общая формула для коэффициента увеличения расчетного сопротивления при изгибе с учетом влияния касательных напряжений имеет вид:

$$c = \frac{\sigma_{хт}}{\sigma_T} \cdot \frac{W_{упр} + 2S_{пл}}{W}.$$

Обозначения см. в п.4.2.

Рассмотрим случай одновременного изгиба и чистого кручения коробчатого сечения. Возьмем недеформирующее тонкостенное сечение с радиусом вписанного круга  $r_0$  и толщиной стенок  $\delta$ . Критерием предельного состояния будет интенсивность максимальной пластической деформации

$$\varepsilon_{ip \max} = \sqrt{\bar{\varepsilon}_x^2 + \frac{1}{3} \bar{\gamma}_{zx}^2} - \varepsilon_T \leq 0,0025.$$

При известном отношении  $\bar{\varepsilon}_x / \bar{\gamma}_{zx} = k$ , можно найти составляющие деформаций  $\bar{\varepsilon}_x = \varepsilon_{\max}$  и  $\bar{\gamma}_{zx} = \gamma_{\max}$ .

Границу между упругой и пластической зонами находят из условия

$$\frac{\varepsilon_{\max}}{h} = \frac{\varepsilon_{хт}}{h_{упр}} \quad \text{при} \quad \varepsilon_{хт} = \sqrt{\varepsilon_T^2 - \frac{1}{3} \gamma_{\max}^2},$$

где  $h$  — половина высоты, сечения,

Высота упругой зоны

$$h_{упр} = h \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_{\max}}\right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{\gamma_{\max}}{\varepsilon_{\max}}\right)^2}. \quad (5.6)$$

В каждой точке сечения интенсивность пластических деформаций

$$\varepsilon_{ip} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{\max}}{h} z + \frac{1}{3} \gamma_{\max}^2} - \varepsilon_T.$$

Напряжения в упругой части сечения определяют обычным образом, а в пластической — по формулам (справедливым и для упругой области):

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_T + \varepsilon_{ip}}; \quad \tau_{zx} = \frac{1}{3} E \gamma_{zx} \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_T + \varepsilon_{ip}}$$

при  $\varepsilon_x = \varepsilon_{\max} z/h$ ,  $\gamma_{zx} = \gamma_{\max} = \text{const}$ .

Усилия, действующие в сечении:

$$M = \int_F \sigma_x z dF \quad \text{и} \quad M_K = \oint \tau_{xy} r_0 \delta ds.$$

Применяя метод переменных параметров упругости, имеем для кинематических факторов:

$$1/\rho = M/(EJ\psi_{II}); \quad \Phi' = M_R/(GJ_R\psi_R) \quad (5.7)$$

$$\text{при } \psi_{II} = \frac{1}{J} \int \frac{\varepsilon_T z^2}{\varepsilon_T + \varepsilon_{ip}} dF; \quad \psi_R = \frac{1}{J_R} \oint \frac{\varepsilon_T r_0^2}{\varepsilon_T + \varepsilon_{ip}} \delta dS;$$

$$J_R = J_c = \oint r_0^2 \delta dS.$$

Для напряжений в сечении:

$$\sigma_x = Ez \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_T + \varepsilon_{ip}} \cdot \frac{M}{EJ\psi_{II}};$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{3} E \frac{\varepsilon_T r_0}{\varepsilon_T + \varepsilon_{ip}} \cdot \frac{M_R}{GJ_R\psi_R}.$$

При заданных усилиях максимальные значения деформаций

$$\varepsilon_{\max} = \frac{Mh}{EJ\psi_{II}}; \quad \gamma_{\max} = \frac{M_R r_0}{GJ_R\psi_R},$$

причем целесообразно применять метод последовательных приближений, полагая в первом приближении  $\psi_{II} = \psi_R = 1$ .

## 5.2. РАСЧЕТ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Рассмотрим значение пластической деформации, которую нужно принимать в расчетах на прочность. Как указывалось, пластическую деформацию до 0,0025 можно считать безопасной и ее можно принимать за верхнюю границу. В то же время, для изгибаемых элементов, имеющих различную степень асимметрии, пластическую деформацию целесообразно принимать переменной. Действительно, предельная несущая способность различных типов сечений различна и зависит от формы сечения. В симметричных сечениях при изгибе пластические деформации развиваются одновременно с двух сторон и при пластической деформации, равной 0,0025, состояние их близко к предельному. Поэтому для таких сечений необходимо уменьшать значение пластической деформации.

В качестве примера возьмем прямоугольное сечение. Предельная несущая способность его характеризуется коэффициентом  $c_{II} = M_{пр}/M_T = 1,5$ . При пластической деформации 0,25% коэффициент  $c(0,25) = 1,43$  для  $\sigma_T = = 320$  МПа. Уменьшение пластической деформации до 0,06 % дает коэффициент  $c(0,06) = 1,25$ .

Следовательно, для симметричных сечений с учетом требований надежности пластическую деформацию в расчетах на прочность можно принимать в размере 0,0006. Практически встречаются в основном сечения типа двутавра, для которых коэффициент формы при образовании пластического шарнира  $c = 1,05 \div 1,15$ . Для несимметричных сечений типа двутавра (тавра) коэффициент формы при образовании пластического шарнира достигает 1,82. Абсолютная не-

сущая способность таких сечений (тавра) относительно невелика и для них можно допустить максимальное значение пластической деформации. Так, для тавра, имеющего  $c_{шт} = 1,82$ , допущение пластической деформации в размере 0,25% дает  $c(0,25) = 1,61$ . Отсюда очевидна необходимость дифференцированного подхода к назначению размера пластических деформаций в зависимости от типа сечения, а точнее от степени его асимметрии, что характеризует коэффициент  $c_{шт}$ .

Прочность сечений стальных элементов при изгибе в одной из главных плоскостей проверяют по выражению

$$M/(cW_{нт}) \leq R, \quad (5.8)$$

где  $M$  — расчетный изгибающий момент;  $c$  — коэффициент, принимаемый для стали 15ХСНД по табл. 5.1;  $W_{нт}$  — минимальный момент сопротивления сечения иетто.

Коробчатые сечения при расчете на изгиб приводятся к соответствующему двутавровому сечению, в котором площадь стенки равна сумме площадей стенок коробки. Тавровому сечению соответствует случай  $F_{min} = 0$ . Для кольцевого сечения  $c = 1,15$ , а для прямоугольного  $c = 1,25$ .

Если, кроме момента, в сечении одновременно действует поперечная сила, вызывающая касательное напряжение  $\tau_{ср} > 0,15 R$  (или  $Q/Q_{пр} > 0,25$ ), то в формулу (5.8) вместо  $c$  подставляют коэффициент

$$c_1 = 1,155c \sqrt{1 - Q/Q_{пр}},$$

где  $Q_{пр}$  — предельное значение поперечной силы, допустимого для сечения при  $\sigma = 0$ .

Кроме проверки прочности, необходимо проверить местную устойчивость пластинчатых элементов того или иного сечения. Поскольку допускаются пластические деформации в предельном состоянии, то при проверке устойчивости пластин нужно оперировать понятием критической деформации, при которой пластина теряет устойчивость. Их значение может быть определено на основе деформационной теории пластичности. Для частных случаев удлиненных равномерно сжатых пластин критические деформации: для свободных свесов (ребер)

$$\epsilon_{кр1} = \frac{1}{3} \left( \frac{\delta}{b} \right)^2; \quad (5.9)$$

для пластин, шарнирно опертых на продольные ребра

$$\epsilon_{кр2} = \frac{\pi^2}{9} \cdot \frac{\delta^2}{b^2} (2 + \sqrt{1 + 3E_R/E_C}), \quad (5.10)$$

где  $\delta$  — толщина пластины;  $b$  — ширина пластины;  $E_R$ ,  $E_C$  — соответственно касательный и секущий модули (в упругой области совпадают с модулем упругости  $E$ ).

Нужно иметь в виду, что в значение критической деформации входит упругая и пластическая составляющие.

Таблица 5.1

$\frac{F_{\min}}{F_{\text{ст}}}$		Коэффициент $c$ для двугаврового сечения при $(F_{\min} + F_{\text{ст}})/F$ , равном									
		0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Пластическая деформация переменная											
0	1,257	1,312	1,376	1,435	1,504	1,576	1,609	1,585	1,458	1,324	1
0,1	(0,06) 1,198	(0,082) 1,234	(0,113) 1,269	(0,146) 1,316	(0,191) 1,364	(0,24) 1,417	(0,24) 1,434	(0,191) 1,407	(0,127) 1,295	(0,079) 1,184	(0,06) 0,92
0,5	(0,06) 1,103	(0,077) 1,115	(0,097) 1,129	(0,127) 1,146	(0,16) 1,164	(0,20) 1,187	(0,195) 1,186	(0,155) 1,124	(0,11) 0,75	(0,07) —	(0,06) —
1	(0,06) 1,064	(0,07) 1,069	(0,081) 1,077	(0,096) 1,086	(0,112) 1,096	(0,133) 1,110	(0,121) 1,100	(0,08) 0,67	(0,06) —	— —	— —
2	(0,06) 1,037	(0,065) 1,040	(0,073) 1,044	(0,085) 1,047	(0,096) 1,049	(0,112) 1,057	(0,089) 0,6	(0,06) —	— —	— —	— —
5	(0,06) 1,016	(0,065) 1,017	(0,071) 1,018	(0,074) 1,020	(0,077) 1,021	(0,089) 1,023	(0,06) 0,54	— —	— —	— —	— —
							1,008				
							(0,06)				

Пластическая деформация  $\epsilon_p = 0,0006$ 

0	1,257	1,263	1,269	1,275	1,281	1,288	1,293	1,300	1,305	1,282	1
0,1	1,198	1,203	1,207	1,212	1,217	1,221	1,225	1,228	1,229	1,169	0,92
0,5	1,103	1,106	1,108	1,111	1,114	1,116	1,119	1,110	0,75	—	—
									1,064		
1	1,064	1,066	1,068	1,070	1,072	1,074	1,076	0,67	—	—	—
								1,037			
2	1,037	1,038	1,039	1,041	1,042	1,043	0,6	—	—	—	—
							1,020				
5	1,016	1,017	1,017	1,018	1,019	1,020	0,54	—	—	—	—
							1,008				

Примечания. 1. Принятые обозначения:  $F_{\min}$ —площадь меньшего пояса;  $F_{\text{ст}}$ —площадь стейки;  $F$ —общая площадь поперечного сечения.

2. В крайних колонках соответствующих строк в числителе приведены для интерполяции предельно возможные значения  $(F_{\min} + F_{\text{ст}})/F$  при заданном значении  $F_{\min}/F_{\text{ст}}$ .

3. Двугавровое сечение с одной вертикальной осью симметрии.

4. Переменная пластическая деформация в скобках дана в процентах.

На участке за пределом пропорциональности и до точки, где переходная кривая на диаграмме  $\sigma - \varepsilon$  стыкуется с горизонтальной линией, касательный и секущие модули:

$$E_K = E \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_{кр} - \sigma_{\pi}}{\sigma_T - \sigma_{\pi}} \right)^2 \right]; \quad (5.11)$$

$$E_C = E \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{1 + E\varepsilon'_p / \sigma_T} \right) \left( \frac{\sigma_{кр} - \sigma_{\pi}}{\sigma_T - \sigma_{\pi}} \right)^2 \right], \quad (5.12)$$

где  $\sigma_{кр}$  — критическое напряжение в пластине ( $\sigma_{\pi} \leq \sigma_{кр} \leq \sigma_T$ );  $\varepsilon'_p$  — минимальная пластическая деформация, соответствующая достижению предела текучести.

Для марок сталей 16Д, 15ХСНД и 10ХСНД эта деформация  $\varepsilon'_p$  принимается равной соответственно 0,000605; 0,000653; 0,000615. Значения критической деформации при указанной минимальной пластической деформации для перечисленных марок сталей равны соответственно 0,0017; 0,00232; 0,00252. Пределы пропорциональности текучести для применяемых в стальных мостах марок сталей (в меганаскалях):  $\sigma_{\pi} = 195$ ,  $\sigma_T = 230$  — для марки 16Д;  $\sigma_{\pi} = 235$ ,  $\sigma_T = 350$  — для марки 15 ХСНД;  $\sigma_{\pi} = 240$ ,  $\sigma_T = 400$  — для марки 10ХСНД.

В точках на площадке текучести критическое напряжение равно пределу текучести, а модули:

$$E_K = 0; \quad E_C = E (1 + \varepsilon_p E / \sigma_T)^{-1}$$

Для тех же точек формулы (5.9) и (5.10) принимают вид:

$$\varepsilon_{кр1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\delta^2}{b^2}; \quad \varepsilon_{кр2} = 3,29 \frac{\delta^2}{b^2}. \quad (5.13)$$

Если допускается пластическая деформация в размере 0,0025, то критическую деформацию для сталей марок 16Д, 15ХСНД, 10ХСНД принимают равными соответственно: 0,003595; 0,004167; 0,004405.

Рассмотрим, например, сжатый пояс коробчатой балки, выполненный в виде ребристой плиты. Сечение балки рассчитано на прочность с допущением пластической деформации  $\varepsilon_p = 0,0025$ . Материал балки — сталь марки 15ХСНД. Требуется определить допустимые отношения  $b/\delta$  для полосовых ребер и для листа между продольными ребрами.

Критическая деформация для стали 15ХСНД  $\varepsilon_{кр} = 0,004167$  при  $\varepsilon_p = 0,0025$ . Используя формулы (5.13), получаем для полосового ребра  $(b/\delta)_1 = 8,94$ , а для листа между ребрами  $(b/\delta)_2 = 28,10$ . Если принять пластическую деформацию  $\varepsilon_p = 0,000653$ , при  $\varepsilon_{кр} = 0,00232$  будем иметь  $(b/\delta)_1 = 11,99$ , а  $(b/\delta)_2 = 37,66$ . Таким образом, при допущении большей пластической деформации, требования к пластинчатым элементам по условиям местной устойчивости более жесткие. При использовании формул упругой стадии работы расчет идет не в запас несущей способности, так как в этом случае при  $\sigma_T = 350$  МПа получим  $(b/\delta)_1 = 15$ , а  $(b/\delta)_2 = 46$ .

При одновременном действии в сечении изгибающих моментов и нормальной силы точные расчеты становятся трудоемкими и их рекомендуется выполнять на ЭВМ. Можно применить

приближенные методы, основанные на аналитических зависимостях предельного равновесия.

Так при растяжении или сжатии с изгибом в одной из главных плоскостей несимметричное двутавровое сечение проверяют на прочность в двух случаях:

1) растягивающие напряжения от момента  $+M$  и осевой силы  $+N$  суммируются в меньшем поясе:

$$\frac{N}{F_{\text{нт}}} \psi + \frac{M}{cW_{\text{нт}}} \leq R; \quad (5.14)$$

$$\psi = \frac{1}{\omega} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{F_{\text{min}}}{F_{\text{max}}} \right) (1 - \omega) - \frac{F_{\text{min}}}{F_{\text{max}}} \cdot \frac{1 - \omega}{1 - 0,5\alpha} \right]$$

при  $\alpha \leq \omega \leq 1$ ;

$$\psi = \frac{1}{\omega} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{F_{\text{min}}}{F_{\text{max}}} (1 - \omega) - \frac{F_{\text{min}}}{F_{\text{max}}} \left( 1 - \omega^2 \frac{1}{\alpha(2 - \alpha)} \right) \right) \right]$$

при  $0 \leq \omega \leq \alpha$ ;

$$\omega = \frac{N}{F_{\text{нт}} R}; \quad \alpha = \frac{1}{1 + 2F_{\text{max}}/F_{\text{ст}}}$$

где  $F_{\text{min}}$ ,  $F_{\text{max}}$ ,  $F_{\text{ст}}$  — площади сечения соответственно меньшего пояса, большего пояса и стенки;  $W_{\text{нт}}$  — минимальный момент сопротивления сечения нетто.

2) в меньшей полке момент  $+M$  вызывает растяжение, а осевая сила  $-N$  — сжатие:

$$\frac{N}{F_{\text{нт}}} \psi + \frac{M}{cW_{\text{нт}}} \leq R; \quad (5.15)$$

$$\psi = \frac{1}{\omega} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{F_{\text{min}}}{F_{\text{max}}} \right) (1 + \omega) (1 - 2\omega)^2 - \frac{F_{\text{min}}}{F_{\text{max}}} \times \right.$$

$\times \frac{1 + \omega}{1 - 0,5\alpha} \left. \right]$  при  $-1 \leq \omega \leq -\alpha$ ;

$$\psi = \frac{1}{\omega} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{F_{\text{min}}}{F_{\text{max}}} \right) (1 + \omega) (1 - 2\omega) - \frac{F_{\text{min}}}{F_{\text{max}}} \times \right.$$

$\times \left( 1 - \omega^2 \frac{1}{\alpha(2 - \alpha)} \right) \left. \right]$  при  $-\alpha \leq \omega \leq 0$ ;

осевую силу  $N$  принимают со знаком минус.

Если же момент  $M$  и осевая сила  $N$  имеют другие знаки, их условно приводят к случаю 1-му или 2-му. Для сечения таврового  $F_{\text{min}} = 0$  симметричного двутаврового  $F_{\text{min}} = F_{\text{max}}$ . Коэффициент  $c$  принимают по табл. 5.1 при  $\epsilon_p = 0,0006$ .

Кольцевое сечение проверяют на прочность по выражениям

$$\frac{N}{F_{\text{нт}}} \psi + \frac{M}{cW_{\text{нт}}} \leq R; \quad \psi = \frac{1}{\omega} \left[ 1 - \cos \left( \omega \frac{\pi}{2} \right) \right]; \quad c = 1,15; \quad \pi = 3,14. \quad (5.16)$$

Для прямоугольного и Н-образного сечений:

$$\frac{N}{F_{\text{нт}}} \psi + \frac{M}{cW_{\text{нт}}} \leq R; \quad \psi = \omega' = \frac{N}{F_{\text{нт}} R}; \quad c = 1,25. \quad (5.17)$$

Для сечений сложной формы, а также при ориентировочных расчетах можно использовать упрощенную зависимость:

$$N/F_{\text{нт}} \pm M/(cW_{\text{нт}}) \leq R. \quad (5.18)$$

На косоугольном сечении нужно рассчитывать по формулам с учетом типа сечения. Для двутавровых симметричных сечений:

$$\frac{M_x}{c_x W_{\text{нт}x}} \omega_x + \frac{M_y}{c_y W_{\text{нт}y}} \leq R \quad \text{при} \quad \omega_x = \frac{M_x}{c_x W_{\text{нт}x} R}, \quad (5.19)$$

где  $M_x$  и  $M_y$  — абсолютные значения изгибающих моментов относительно осей  $x$  и  $y$ ;  $c_x$  и  $c_y$  — определяют как независимые величины для случаев изгиба относительно осей  $x$  (горизонтальная) и  $y$  (вертикальная);  $W_{\text{нт}x}$ ,  $W_{\text{нт}y}$  — минимальные моменты сопротивления сечения нетто относительно осей  $x$  и  $y$ :

Для коробчатых симметричных сечений при косом изгибе:

$$\frac{M_x}{c_x W_{\text{нт}x}} \psi_x + \frac{M_y}{c_y W_{\text{нт}y}} \psi_y \leq R \quad \text{при} \quad \psi_x = \frac{(\omega_x + 0,7)^2}{3,38\omega_x};$$

$$\psi_y = \frac{(\omega_y + 0,7)^2}{3,38\omega_y}; \quad \omega_y = \frac{M_y}{c_y W_{\text{нт}y} R}. \quad (5.20)$$

Для иных типов сечений при расчете на косоугольный изгиб нужно пользоваться более простым выражением:

$$\frac{M_x y}{c_x J_{\text{нт}x}} \pm \frac{M_y x}{c_y J_{\text{нт}y}} \leq R, \quad (5.21)$$

где  $J_{\text{нт}x}$ ,  $J_{\text{нт}y}$  — моменты инерции сечения нетто относительно осей  $x$  и  $y$ .

В случае растяжения или сжатия с косоугольным изгибом для первого приближения и сложных типов сечений для проверки прочности можно рекомендовать выражение

$$\frac{N}{F_{\text{нт}}} \pm \frac{M_x}{I_{\text{нт}x}} y \pm \frac{M_y}{J_{\text{нт}y}} x \leq R. \quad (5.22)$$

Более полно несущая способность сечения оценивается формулой

$$\frac{N}{F} \psi' + \frac{M_x}{c_x W_{\text{нт}x}} \leq R'_x; \quad (5.23)$$

$$R'_x = \left(1 - \frac{M_y}{c_y W_{\text{нт}y} R}\right) R; \quad \omega = \frac{N}{F_{\text{нт}} R'_x} \quad (\text{входит в значение } \psi).$$

где  $M_x$  — «определяющий» изгибающий момент для рассматриваемого сечения.

Определяющий изгибающий момент нужно выбирать с учетом конкретных условий расчета, оценки значений напряжений от моментов, сил, вызывающих эти моменты. Это позволит более полно учесть несущую способность сечения.

Такой подход к общему случаю сложного сопротивления сечения диктуется следующими соображениями. Весьма трудно в аналитической форме представить предельную поверхность в координатах  $N - M_x - M_y$ . Вводя допущение о линейной форме следа предельной поверхности на координатных плоскостях  $OM_x M_y$  и  $ONM_y$ , возможно аналитическое представление предельной поверхности. Такой подход идет в запас несущей способности. Если же встречаются трудности с назначением «определяющего» изгибающего момента, можно рассчитывать в двух предположениях и принять решение, дающее более экономное сечение. Возможная «ошибка» здесь всегда идет в запас несущей способности.

Прочность стенок сплошных балок по касательным напряжениям проверяют по выражению

$$QS_{бр}/(c' J_{бр} \delta) \leq R_{\tau}; \quad c' = 1,25 - 0,25 \bar{\tau}_{\min}/\bar{\tau}_{\max}, \quad (5.24)$$

где  $Q$  — расчетная поперечная сила;  $S_{бр}$  — статический момент части сечения брутто относительно центральной нейтральной оси;  $J_{бр}$  — момент инерции сечения брутто;  $\delta$  — толщина сечения в проверяемой точке;  $R_{\tau}$  — расчетное сопротивление на сдвиг, равное  $0,6 R$ ;  $\bar{\tau}_{\min}$ ,  $\bar{\tau}_{\max}$  — минимальное и максимальные касательные напряжения в упругой стадии в пределах стенки балки.

При поперечном изгибе, когда в сечении одновременно действуют поперечная сила и изгибающий момент, найденные для определенного положения нагрузки, прочность можно проверять как при чистом изгибе, если поперечная сила воспринимается упругим ядром сечения. Прочность с учетом касательных напряжений нужно проверить в общем случае:

$$\sigma_{пр} = (\sigma^2 + 3\tau^2)^{1/2} \leq 1,15R. \quad (5.25)$$

При невыполнении указанных условий прочности необходимо увеличить высоту упругого ядра, т. е. уменьшить значение пластической деформации.

Пластинчатые элементы, находящиеся в условиях плоского напряженного состояния, в общем случае при допущении пластических деформаций рекомендуется проверять по выражению

$$(\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau^2)^{1/2} \leq 1,1R. \quad (5.26)$$

где  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  — нормальные напряжения положительные при сжатии.

Рассмотрим поперечное сечение в виде несимметричного двутавра с одной вертикальной осью симметрии при действии на него изгибающего момента. Примем, что деформирование стали следует диаграмме Прандтля.

Несущую способность поперечного сечения проверим по формуле

$$M/W_{нт} \leq cR. \quad (5.27)$$

Общая формула для коэффициента  $c$  при изгибе несимметричных сечений относительно оси  $y_{упр}$  (нейтральная ось) имеет вид (рис. 5.2, а, б)

$$c = (W_{упр} + S_{пл}^{(b)} + S_{пл}^{(n)})/W_{min}, \quad (5.28)$$



где  $W_{упр}$  — момент сопротивления упругой зоны относительно оси  $y_{пл}$  (вычисляется для точки со значением  $z = h_{упр}$ );  $S_{пл}^{(в)}$ ,  $S_{пл}^{(н)}$  — статические моменты верхней и нижней пластических зон относительно оси  $y_{пл}$ ;  $W_{min}$  — значение наименьшего момента сопротивления исходного сечения (относительно оси  $y_{упр}$ ).

Положение оси  $y_{пл}$  (значение  $\Delta$ ) определится из уравнения

$$S_{упр} + h_{упр} (F_{пл}^{(в)} - F_{пл}^{(н)}) = 0 \text{ при } h_{упр} = \kappa (h_{max} + \Delta), \kappa = (1 + E\epsilon_p/R_H)^{-1},$$

где  $S_{упр}$  — статический момент упругой зоны относительно оси  $y_{упр}$ ;  $h_{упр}$  — половина высоты упругой зоны;  $F_{пл}^{(в)}$ ,  $F_{пл}^{(н)}$  — площади верхней и нижней пластических зон,  $R_H$  — нормативное сопротивление.

При двусторонней текучести  $\kappa < (h_{min} - \Delta)/(h_{max} + \Delta)$ , при односторонней  $\kappa \geq (h_{min} - \Delta)/(h_{max} + \Delta)$  и  $S_{пл}^{(н)} = F_{пл}^{(н)} = 0$  (Здесь  $h_{max}$  и  $h_{min}$  — расстояния от нейтральной оси  $y_{упр}$  исходного сечения до середины верхней и нижней полки). Для двутаврового сечения с одной осью симметрии положение нейтральной оси определяется выражениями:

1) двусторонняя текучесть (см. рис. 5.2, б) при дополнительном условии  $F_{min} - F_{ст} > F_{max}$ :

$$\Delta_2 = (F_{max}^2 - F_{min}^2)/(2\delta_{ст} F), \quad (5.29)$$

где  $F_{max}$  — площадь большей полки;  $F_{min}$  — площадь меньшей полки;  $\delta_{ст}$  — толщина стенки;  $F$  — площадь всего поперечного сечения;

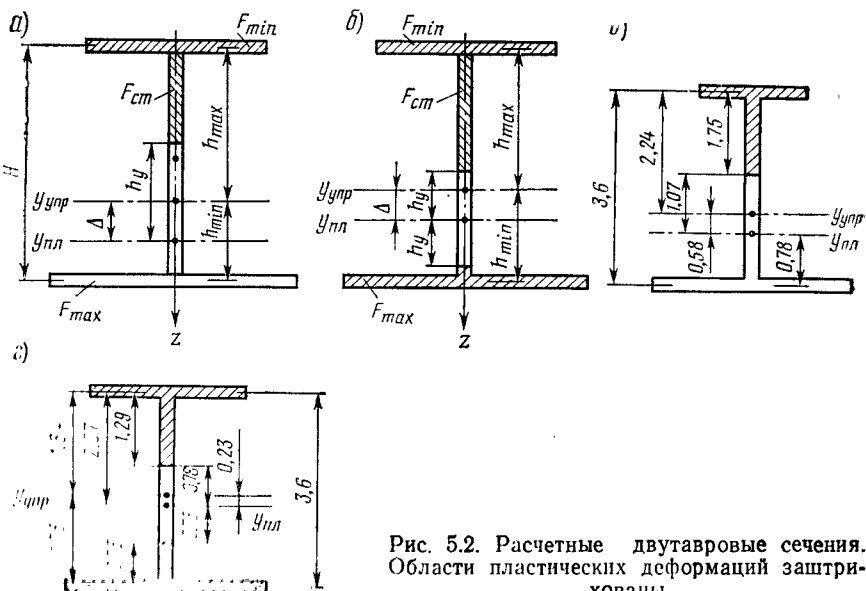


Рис. 5.2. Расчетные двутавровые сечения. Области пластических деформаций заштрихованы

2) односторонняя текучесть (см. рис. 5.2, а)

$$\Delta_1^2 \left( -\frac{\kappa^2}{2} + \kappa - \frac{1}{2} \right) + \Delta_1 \left[ -\kappa^2 h_{\max} + \kappa \left( 2h_{\max} + \frac{F_{\min}}{\delta_{\text{ст}}} \right) + h_{\min} + \frac{F_{\max}}{\delta_{\text{ст}}} \right] + \left[ -\frac{\kappa^2}{2} h_{\max}^2 + \kappa \left( h_{\max} \frac{F_{\min}}{\delta_{\text{ст}}} + h_{\max}^2 \right) - \frac{h_{\min}^2}{2} - \frac{F_{\max}}{\delta_{\text{ст}}} h_{\min} \right] = 0. \quad (5.30)$$

Положение оси  $y_{\text{упр}}$  определяется из выражений:

$$h_{\min} = \frac{F_{\text{ст}} (F_{\min} + 0,5F_{\text{ст}})}{\delta_{\text{ст}} F}; \quad h_{\max} = \frac{F_{\text{ст}} (F_{\max} + 0,5F_{\text{ст}})}{\delta_{\text{ст}} F},$$

где  $F_{\text{ст}}$  — площадь стенки.

Сечения типа коробчатых при изгибе в главной плоскости приводятся к двутавровым с толщиной стенки равной сумме толщин стенок исходного сечения.

П о с л е д о в а т е л ь н о с т ь расчета:

вычисляют коэффициент  $\kappa = (1 + E\varepsilon_p/R_H)^{-1}$ ;

находят положение нейтральной оси ( $\Delta_2$  или  $\Delta_1$ );

определяют тип развития пластических деформаций — двусторонняя текучесть при  $\kappa < (h_{\min} - \Delta)/(h_{\max} + \Delta)$  или односторонняя при  $\kappa \geq (h_{\min} - \Delta)/(h_{\max} + \Delta)$ ; разграничивают области упругих и пластических деформаций  $h_{\text{упр}} = k(h_{\max} + \Delta)$ ; по формуле (5.28) находят коэффициент  $c$ .

Рассмотрим примеры определения коэффициента  $c$  при изгибе несимметричного сечения (рис. 5.2, в, г). Характеристики поперечного сечения:  $H = 3,6$  м;  $F = 0,5094$  м<sup>2</sup>;  $F_{\max} = 0,273$  м<sup>2</sup>;  $F_{\min} = 0,150$  м<sup>2</sup>;  $F_{\text{ст}} = 0,0864$  м<sup>2</sup>;  $\delta_{\text{ст}} = 0,024$  м. Нормативное сопротивление  $R_H = 320$  МПа.

Положение нейтральной оси  $y_{\text{упр}}$  определится величинами:

$$h_{\max} = \frac{0,0864 (0,273 + 0,5 \cdot 0,0864)}{0,024 \cdot 0,5094} = 2,24 \text{ м};$$

$$h_{\min} = \frac{0,0864 (0,150 + 0,5 \cdot 0,0864)}{0,024 \cdot 0,5094} = 1,36 \text{ м}.$$

Относительно оси  $y_{\text{упр}}$  момент инерции  $J_{\text{упр}} = 0,273 \cdot 1,36^2 + 0,150 \times 2,24^2 + 0,02 \cdot 3,6^3 : 12 + 3,6 \cdot 0,024 (2,24 - 1,8)^2 = 1,3675$  м<sup>4</sup>. Для этого случая минимальный момент сопротивления  $W_{\min} = 1,3675 : 2,24 = 0,61$  м<sup>3</sup>.

Определяем коэффициент  $c$ .

1. При пластической деформации  $\varepsilon_p = 0,0025$  имеем  $\kappa = 320 : (320 + 525) = 0,379$ .

2. Для определения типа развития пластических деформаций сначала проверяем возможность развития двусторонней текучести как наиболее простой. Находим  $\Delta_2 = \frac{0,273^2 - 0,150^2}{2 \cdot 0,02 \cdot 0,5094} = 2,13$  м.

Для этого значения  $\Delta_2$  условие  $\kappa < (h_{\min} - \Delta) : (h_{\max} + \Delta)$  не выполняется, следовательно, имеет место односторонняя текучесть (см. рис. 5.2, в):  $\kappa > (1,36 - 2,13) : (2,24 + 2,13)$ . Значение  $\Delta_1$ , определяющее положение нейтральной оси при односторонней текучести, находим из уравнения (5.30), для чего предварительно вычисляем следующие коэффициенты:  $\kappa^2 = 0,14364$ ;

$0,07182$ ;  $k^2 h_{\max} = 0,32175$ ;  $F_{\min}/\delta_{\text{ст}} = 6,25$ ;  $F_{\max}/\delta_{\text{ст}} = 11,375$ ;  
 $h_{\max}^2 = 0,3604$ ;  $F_{\min} h_{\max}/\delta_{\text{ст}} = 14,00$ ;  $h_{\min}^2/2 = 0,9248$ ;  $h_{\max}^2 = 5,0176$ ;  
 $F_{\max} h_{\min}/\delta_{\text{ст}} = 15,47$ ; коэффициент при  $\Delta^2$  равен  $-0,07182 + 0,379 - 1/2 = -0,1928$ ; коэффициент при  $\Delta$  равен  $-0,32175 + 4,06667 + 1,3600 + 11,375 = 16,48$ ; свободный член  $-0,3604 + 7,208 - 0,9248 - 15,47 = 9,547$ .

Уравнение для  $\Delta_1$  принимает вид:  $-0,1928 \Delta^2 + 16,48\Delta - 9,547 = 0$  или  $-85,48 \Delta + 49,52 = 0$ . Решение его дает следующие значения:  $\Delta_{1(2)} = 42,74 \pm \sqrt{42,74^2 - 49,52} = 42,74 \pm 42,16 = 84,9$  (0,58) мм. Таким образом, смещение нейтральной оси  $\Delta_1 = 0,58$  м.

Условие  $\kappa > (h_{\min} - \Delta)/(h_{\max} + \Delta)$  удовлетворяется, так как  $0,379 > (1,36 - 0,058) : (2,24 + 0,58) = 0,276$ .

3. Граница между упругой и пластической зонами  $h_{\text{упр}} = k(h_{\max} + \Delta) = 0,379(2,24 + 0,58) = 1,07$  м.

4. Коэффициент  $c$  находим из выражения (5.28), при  $S_{\text{пл}}^{(H)} = 0$ . Для этого вычисляем:  $J_{\text{упр}} = 0,273 \cdot 0,78^2 + 0,024 \cdot 1,85^3 : 12 + 0,024 \cdot 1,85(1,07 - 0,925)^2 = 0,1797$  м<sup>4</sup>;  $W_{\text{упр}} = 0,1797 : 1,07 = 0,1680$  м<sup>3</sup>;  $S_{\text{пл}}^{(H)} = 0,150 \cdot 2,82 + 1,75 \times 0,024 \cdot 1,945 = 0,505$  м<sup>3</sup>. Отсюда  $c = 0,1680 + 0,505 : 0,61 = 1,103$ .

Таким образом, при допущении ограниченной пластической деформации  $\mu = 0,0025$ , расчетное сопротивление может быть повышено на 10,3%.

Случай двусторонней текучести получим, если по сравнению с рассмотренным сечением изменим площадь верхней полки:  $F_{\min} = 0,260$  м<sup>2</sup>;  $F = 0,6194$  м<sup>2</sup> (рис. 5.2, в).

Для установления положения нейтральной оси  $y_{\text{упр}}$  определим:

$$h_{\max} = \frac{0,0864(0,273 + 0,5 \cdot 0,0864)}{0,024 \cdot 0,6194} = 1,84 \text{ м};$$

$$h_{\min} = 1,76 \text{ м}.$$

Смещение нейтральной оси  $\Delta_2 = (0,273^2 - 0,260^2) : (2 \cdot 0,024 \cdot 0,6194) = 0,233$  м.

Условие двусторонней текучести  $\kappa < (h_{\min} - \Delta)/(h_{\max} + \Delta)$  выполнено, так как  $0,379 < (1,76 - 0,23) : (1,89 + 0,23) = 0,74$ . От нейтральной оси  $y_{\text{пл}}$  высота упругой зоны  $h_{\text{упр}} k(h_{\max} + \Delta) = 0,379(1,84 + 0,23) = 0,78$  м.

Коэффициент  $c$  находится из выражения (5.28):

$$W_{\text{упр}} = 0,024 \cdot 1,56^2 : 6 = 0,009734 \text{ м}^3; S_{\text{пл}}^{(H)} + S_{\text{пл}}^{(H)} = 0,273 \cdot 1,53 + 0,024 \cdot 0,75(0,78 + 0,375) + 0,260 \cdot 2,07 + 0,021,29(0,78 + 0,645) = 1,021 \text{ м}^3;$$

$$J_{\text{упр}} = 0,273 \cdot 1,72^2 + 0,260 \cdot 1,84^2 + 0,024 \cdot 3,6^3 : 12 + 3,6 \cdot 0,024 + (1,84 - 1,80)^2 = 1,819 \text{ м}^4; W_{\min} = 1,319 : 1,84 = 0,9887 \text{ м}^3; c = (0,00973 + 1,021) : 0,9887 = 1,042.$$

В данном случае учет развития пластических деформаций условно повышает расчетное сопротивление на 4,2%. Это сравнительно небольшое значение объясняется тем, что стенка в составе рассмотренного сечения воспринимает незначительную долю изгибающего момента.

### 5.3. РАСЧЕТ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ НЕРАВНОМЕРНОМ ПО ШИРИНЕ РАСПРЕДЕЛЕНИИ НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

В пролетных строениях стальных мостов со сплошными балками и ортотропной плитой имеет место неравномерное распределение напряжений по ширине сечения. Степень неравномерности зависит от геометрических размеров поперечного сечения

и характера внешних воздействий. Определяют эти напряжения путем расчета пролетного строения на ЭВМ.

В упругопластической стадии работы пластические деформации распространяются как по высоте, так и по ширине поперечного сечения, при этом в стенках и полках имеются упругие зоны. Рассмотрим коробчатое сечение (рис. 5.3). Принимаем, что в стенках распределение деформаций следует линейному закону, а в полках — зависимости

$$\varepsilon_{\text{п}} = \varepsilon_{\text{max}} - (\varepsilon_{\text{max}} - \varepsilon_{\text{min}}) (1 - 4y^2/B^2).$$

Границы между упругой и пластической зонами по высоте определяются выражением:

$$h_{\text{упр}} = \kappa_{\text{в}} h \text{ при } \kappa_{\text{в}} = (1 + E\varepsilon_{\text{р}}/\sigma_{\text{т}})^{-1},$$

где  $\varepsilon_{\text{р}} \leq 0,0025$  — пластическая деформация;  $\sigma_{\text{т}}$  — предел текучести материала.

Границу между упругой и пластической зонами по ширине сечения находим из условия

$$\varepsilon_{\text{т}} = \varepsilon_{\text{max}} - (\varepsilon_{\text{max}} - \varepsilon_{\text{min}}) (1 - 4b_y^2/B^2) \text{ при } \varepsilon_{\text{max}} = \varepsilon_{\text{т}} + \varepsilon_{\text{р}},$$

где  $\varepsilon_{\text{т}}$  — деформация, соответствующая пределу текучести материала.

После преобразований  $b_{\text{упр}} = \kappa_{\text{г}} b$  при

$$\kappa_{\text{г}} = \sqrt{\frac{\sigma_{\text{т}} - \bar{\sigma}_{\text{min}}}{\sigma_{\text{т}} - \bar{\sigma}_{\text{min}} + E\varepsilon_{\text{р}}}};$$

$$\bar{\sigma}_{\text{min}} = (\sigma_{\text{т}} + \varepsilon E_{\text{р}})/\alpha < \sigma_{\text{т}}; \alpha = \frac{\bar{\sigma}_{\text{max}}}{\bar{\sigma}_{\text{min}}}; \bar{\sigma}_{\text{min}} \geq \sigma_{\text{т}}; \kappa_{\text{г}} = 0,$$

где  $\bar{\sigma}_{\text{max}}$ ,  $\bar{\sigma}_{\text{min}}$  — значения напряжений в упругой стадии работы сечения.

Действующий в сечении изгибающий момент

$$M_{\text{пл}} = \sigma_{\text{т}} h \left[ \frac{F_{\text{ст}}}{3} (3 - \kappa_{\text{в}}^2) + 2F_{\text{пол}} \left( 1 - \frac{2}{3} \kappa_{\text{г}} \right) + \frac{4}{3} F_{\text{пол}} \frac{\bar{\sigma}_{\text{min}}}{\sigma_{\text{т}}} \kappa_{\text{г}} \right].$$

Прочность рассматриваемого сечения по заданному значению момента проверяем по формулам:

$$\begin{aligned} M/W_{\text{ред}} &\leq c_{\text{к}} \sigma_{\text{т}}; \\ c_{\text{к}} &= \frac{3 - \kappa_{\text{в}}^2 + 2f(3 - 2\kappa_{\text{г}}) + 4f\kappa_{\text{г}} \bar{\sigma}_{\text{min}}/\sigma_{\text{т}}}{2 + 6f_1}; \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$f = \frac{F_{\text{пол}}}{F_{\text{ст}}}; f_1 = \omega \frac{F_{\text{пол}}}{F_{\text{ст}}} \quad \omega f;$$

$$\omega = \frac{1}{3} \left( 1 + 2 \frac{\bar{\sigma}_{\text{min}}}{\bar{\sigma}_{\text{max}}} \right); \bar{\sigma}_{\text{max}} = E\varepsilon_{\text{max}},$$

где  $W_{\text{ред}}$  — редуцированный по максимальному упругому напряжению момент сопротивления сечения;  $F_{\text{ст}}$ ,  $F_{\text{пол}}$  — площади одной стенки и одной полки;  $\omega$  — редуцированный коэффициент для полки при расчете в упругой стадии работы.

Полученное значение для коэффициента  $\kappa_{\Gamma}$  увеличения расчетного сопротивления при расчете на прочность позволяет учитывать строго ограниченное развитие пластических деформаций как по высоте, так и ширине тонкостенного коробчатого сечения.

Рассмотрим расчет отдельной полки коробчатой балки (рис. 5.4) с учетом развития пластических деформаций.

Ширина упругой зоны

$$b_y = b \kappa_{\Gamma}$$

$$\text{при } \kappa_{\Gamma} = \sqrt{\frac{\sigma_{\Gamma} - \sigma_{\min}}{\sigma_{\Gamma} - \sigma_{\min} + E \varepsilon_p}}$$

Коэффициент условного увеличения расчетного сопротивления за счет пластических деформаций

$$\kappa_{\Gamma} = \frac{1 - \frac{2}{3} \kappa_{\Gamma} (1 - \sigma_{\min} / \sigma_{\Gamma})}{\omega} \quad (5.32)$$

$$\text{при } \omega = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{2\sigma_{\min}^*}{\sigma_{\max}^*} \right);$$

$$\sigma_{\min} = \frac{\sigma_{\Gamma} + E \varepsilon_p}{\alpha} < \sigma_{\Gamma}; \quad \alpha = \frac{\sigma_{\max}^*}{\sigma_{\min}^*}$$

где  $\sigma_{\max}^*$ ,  $\sigma_{\min}^*$  — соответственно максимальное и минимальное напряжения в предположении упругой работы материала конструкции ( $\sigma_{\min} > \sigma_{\Gamma}$ ,  $\kappa_{\Gamma} = 0$ ).

Изменение редукционного коэффициента для стали 10ХСНД при отсутствии пластических деформаций ( $\varepsilon_p = 0$ ) и их развитии в размере  $\varepsilon_p = 0,0006$  и  $\varepsilon_p = 0,0025$  показано на рис. 5.4.

Эффективная ширина полки  $b_e = \nu b$  при  $\nu = \omega \kappa_{\Gamma}$ . При относительно небольшой разнице максимальных и минимальных упругих напряжений учет пластических деформаций позволяет включать в сечение балки всю ширину полки.

Рассмотрим числовой пример. Пусть  $\sigma_{\Gamma} = 320$  МПа;  $\sigma_{\max}^* = 390$  МПа;  $\sigma_{\min}^* = 30$  МПа;  $\varepsilon_p = 0,0025$ .

Произведем вычисления:

$$\sigma_{\min} = \frac{320 + 525}{13} = 65 \text{ МПа}; \quad \kappa = \sqrt{\frac{320 - 65}{320 - 65 + 525}} = 0,572;$$

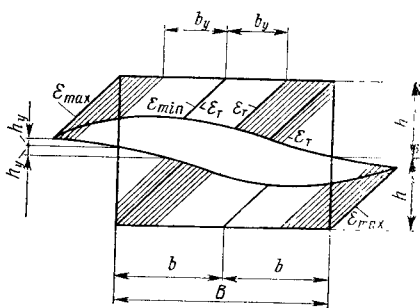


Рис. 5.3. Схема к расчету коробчатого сечения

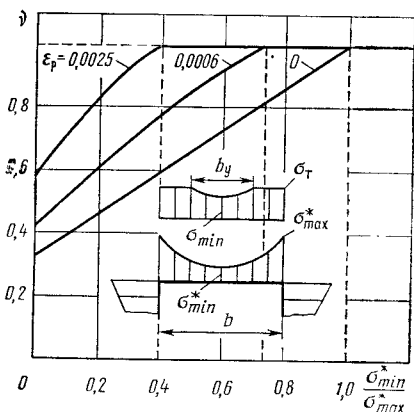


Рис. 5.4. Зависимости редукционного коэффициента  $\nu$  от отношения упругих напряжений

$$\omega = \frac{1}{3} \left( 1 + 2 \cdot \frac{30}{390} \right) = 0,385; \quad c_{II} = \frac{1 - 2/3 \cdot 0,572 (1 - 65/320)}{0,385} = 1,82.$$

Таким образом, при допущении пластической деформации  $\varepsilon_p = 0,0025$  расчетное сопротивление может быть повышено на 82%. Заметим, что в данном примере принята весьма высокая степень неравномерности распределения напряжений  $\alpha = \sigma_{\max}^* / \sigma_{\min}^* = 13$ .

Рассчитывая двутавровое сечение с широкими полками при допущении ограниченного развития пластических деформаций, примем следующее распределение деформаций по отдельным элементам сечения (рис. 5.5):

в стенке  $\varepsilon_{\sigma T} = \alpha z$ ;

в левой полке  $\varepsilon_{лп} = \varepsilon_{\max} - (\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{1\min}) (1 - 4y^2/B_1^2)$  при  $B_1 = 2b_1$ ;

в правой полке  $\varepsilon_{пп} = \varepsilon_{\max} - (\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{2\min}) (1 - 4y^2/B_2^2)$  при  $B_2 = 2b_2$ .

Граница между упругой и пластической зонами:

в стенке  $h_y = \kappa_B h$ ,  $\kappa_B = \sigma_T / (\sigma_T + E\varepsilon_p)$ ;

в левой полке  $b_{1y} = k_{r1} b_1$ ,  $k_{r1} = \left( \frac{\sigma_T - \sigma_{1\min}}{\sigma_T - \sigma_{1\min} + E\varepsilon_p} \right)^{1/2}$ ;

в правой полке  $b_{2y} = k_{r2} b_2$ ,  $k_{r2} = \left( \frac{\sigma_T - \sigma_{2\min}}{\sigma_T - \sigma_{2\min} + E\varepsilon_p} \right)^{1/2}$ ;

при  $\sigma_{1\min} = (\sigma_T + E\varepsilon_p) / \alpha_1$ ;  $\sigma_{2\min} = (\sigma_T + E\varepsilon_p) / \alpha_2$ ;

$\alpha_1 = \sigma_{\max}^* / \sigma_{1\min}^*$ ;  $\alpha_2 = \sigma_{\max}^* / \sigma_{2\min}^*$ ,

где  $\sigma_{\max}^*$ ,  $\sigma_{1\min}^*$ ,  $\sigma_{2\min}^*$  — значения напряжений в упругой стадии работы сечения.

Если  $\sigma_{1\min} \geq \sigma_T$ , то  $k_{r1} = 0$ ; если  $\sigma_{2\min} \geq \sigma_T$ , то  $k_{r2} = 0$ .

Прочность данного сечения проверяют по выражению

$M/W_{ред} \leq c_T R$ , при

$$c_T = [3 - \kappa_B^2 + 2f_{л}(3 - 2\kappa_{r1}) + 2f_{пр}(3 - 2\kappa_{r2}) + 4\sigma_{1\min} f_{л} \kappa_{r1} / \sigma_T + 4\sigma_{2\min} f_{пр} \kappa_{r2} / \sigma_T] : [2 + 6(f_{л1} + f_{пр})], \quad (5.33)$$

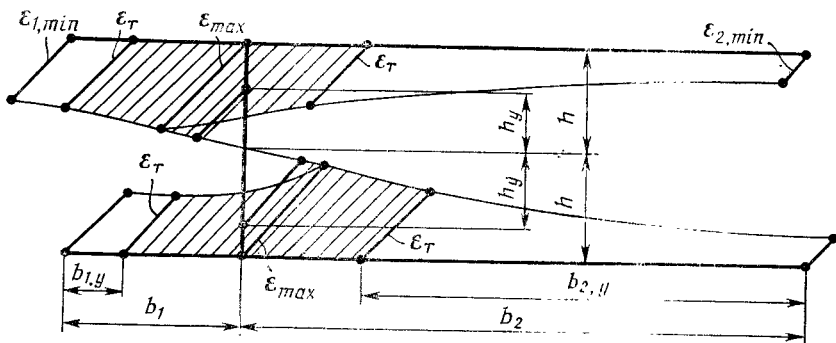


Рис. 5.5. Схема и эпюры  $\varepsilon$  двутаврового сечения

$$f_{л} = 2 \frac{F_{пл}}{F_{ст}}, f_{пр} = 2 \frac{F_{прп}}{F_{ст}} \cdot f_{л1} = f_{л} \omega_1, f_{пр1} = f_{пр} \omega_2, \omega_1 = \\ = \frac{1}{3} \left( 1 + 2 \frac{\sigma_{1 \text{ min}}^*}{\sigma_{\text{max}}^*} \right), \omega_2 = \frac{1}{3} \left( 1 + 2 \frac{\sigma_{2 \text{ min}}^*}{\sigma_{\text{max}}^*} \right), \sigma_{\text{max}}^* = E \varepsilon_{\text{max}},$$

где  $W_{\text{ред}}$  — редуцированный по максимальному упругому напряжению момент сопротивления сечения;  $F_{пл}$ ,  $F_{прп}$ ,  $F_{ст}$  — площади левой полки, правой полки и стенки поперечного сечения.

Таким образом, учет неравномерного распределения напряжений по ширине поперечного сечения включает расчет как в упругой стадии, так и в упругопластической. Такой подход позволяет запроектировать экономичную и достаточно надежную конструкцию.

#### 5.4. РАСЧЕТ ЭЛЕМЕНТОВ ОБРАТНЫМ МЕТОДОМ

Исследование напряженного состояния стальных элементов пролетных строений мостов в упругопластической стадии вызывает известные трудности, так как в замкнутом виде можно получить решения лишь для частных случаев. Если же напряженное состояние определяется рядом параметров целесообразно использовать обратный метод решения, который развит для упругопластических расчетов. Для расчетов в упругой стадии часто принимают те или иные кинематические гипотезы относительно характера распределения в сечениях деформаций (напряжений). С целью получения инженерных решений целесообразно использовать эти гипотезы и в упругопластической стадии; примером такого подхода служит использование известной гипотезы плоских сечений.

Сущность обратного метода заключается в следующем. Пусть деформированное состояние сечения или элемента характеризуется некоторой функцией  $f(x, y, z, a_1, a_2, \dots, a_n)$ , переменных  $x, y, z$  и параметров  $a_i$ , удовлетворяющей граничным условиям. Тогда внешние силы  $P_i$ , действующие на элемент (или приложенные к сечению), можно считать зависящими от параметров  $a_i$ ; соответственно можно построить некоторую поверхность в координатах  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , откладывая по осям координат значения внешних сил. Такая поверхность является предельной и каждая точка ее определяет предельные величины сил  $P_j$ . Эта поверхность выпуклая.

Проиллюстрируем рассматриваемый метод на примере исследования напряженного состояния прямоугольного сечения при совместном действии изгиба и растяжения (рис. 5.6).

Будем считать справедливой гипотезу плоских сечений, а материал — идеально пластическим. За предельное состояние примем такое, при котором максимальная деформация в сечении не превышает значения  $\varepsilon_{\text{max}} = \varepsilon_T + \varepsilon_{p \text{ max}}$  при  $\varepsilon_T = \sigma_T/E$ ;  $\varepsilon_{p \text{ max}} = 0,0025$ . В рассматриваемом примере  $\sigma_T = 320$  МПа и  $\varepsilon_{\text{max}} = 0,0040$ . Параметрами, определяющими деформированное состояние сечения в данном случае, будут фибровые деформации  $\varepsilon_{\text{max}}$  и  $\varepsilon_{\text{min}}$ .

Зафиксировав  $\varepsilon_{\max}$ , можно графически изобразить возможные деформированные состояния сечения. Изменяя значение  $\varepsilon_{\min}$ , можно найти усилия:  $N_i = b \int_{-0,5h}^{0,5h} \sigma dz$ ;  $M_i = b \int_{0,5h} \sigma z dz$  (где  $b$  и  $h$  — соответственно ширина и высота сечения). В случае сложных сечений и произвольной диаграммы  $\sigma - \varepsilon$  целесообразно использовать численный метод, удобный для реализации на ЭВМ. Для этого нужно по высоте сечение разбить на ряд полос, площади которых сосредоточить в отдельных точках. Так как внешние факторы — это  $N$  и  $M$ , то зависимость между ними изобразится на плоскости, т. е. будет иметь место предельная кривая для заданного значения пластической деформации  $\varepsilon_{p \max} = 0,0025$  (рис. 5.7); в данном примере:  $N_{пр} = 10\sigma_T$ ;  $M_{пр} = 25 \sigma_T$ ;  $M_T = \frac{50}{3} \sigma_T$ ;  $c = \frac{3-\kappa^2}{2} = 1,43$ ;  $k = (1 + E\varepsilon_p/\sigma_T)^{-1} = 0,38$ .

Таким образом построенная кривая для упругопластической стадии работы сечения позволяет определить предельные значения осевой силы и изгибающего момента при заданной пластической деформации.

При вычислении перемещений в упругопластической стадии в случае действия в элементах усилий  $N$  и  $M$  используем формулы:

$$\Delta_i = \int_l \frac{MM_i}{EJ\psi_{II}} dx + \int_l \frac{NN_i}{EF\psi_p} dx, \quad \psi_{II} = \frac{b}{J} \int_{-h_H}^{h_B} \frac{z^2}{1 + E\varepsilon_p/\sigma_T} dz; \quad \psi_p = \frac{b}{F} \int_{-h_H}^{h_B} \frac{1}{1 + E\varepsilon_p/\sigma_T} dz,$$

где  $\psi_{II}$ ,  $\psi_p$  — функции пластичности в сечении, зависящие от напряженного состояния.

Пределы интегрирования можно выбирать, например, по отношению к центру тяжести сечения, к которому приводятся сила и момент.

Рассматриваемый обратный метод решения позволяет легко вычислять также функции пластичности в сечении, так как распределение деформаций задается.

Метод эффективен и в случае расчета распределения усилий между балками и многобалочных пролетных строениях, если вводятся кинематические гипотезы относительно характера перемещений (прогибов) в поперечном направлении (внецентренное сжатие, жесткий брус и др.). Допущение ограниченного развития пластических деформаций в наиболее нагруженных балках позволяет более полно использовать резервы прочности других (соседних) балок. При этом можно повысить требования к поперечным связям, чтобы не допустить в них пластические деформации с целью обеспечения надежной совместной работы главных балок.



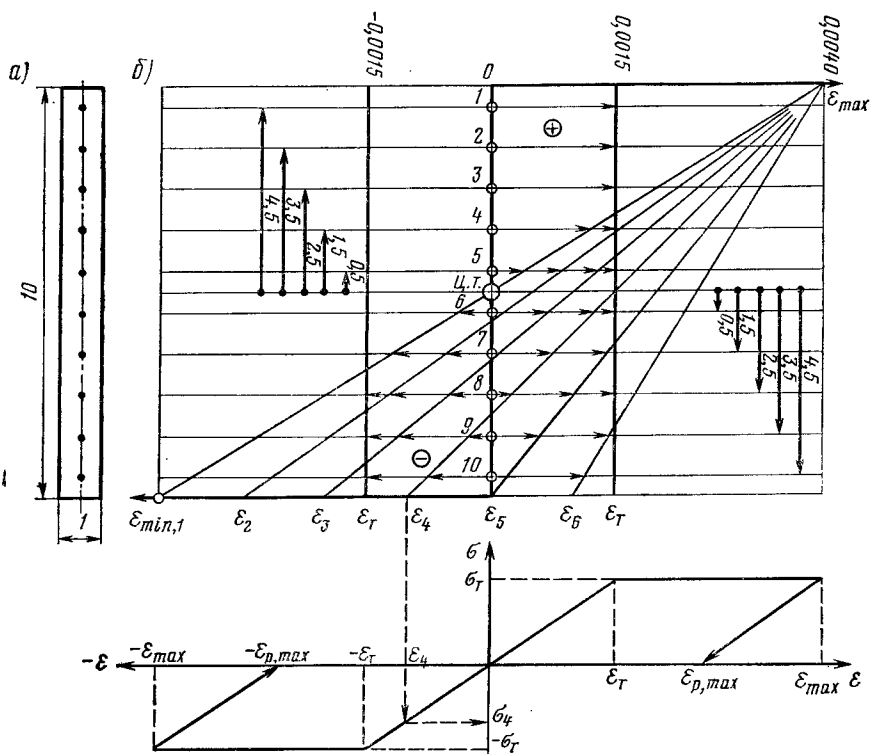


Рис. 5.6. Схема к расчету сечения обратным методом ↑

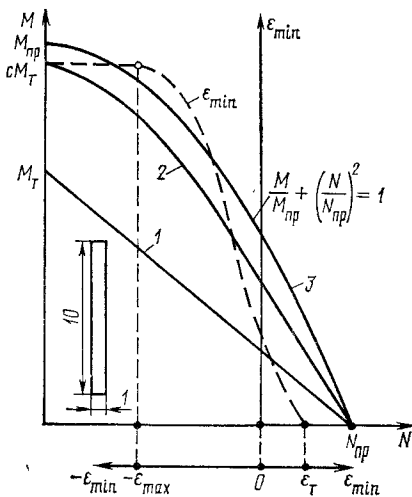


Рис. 5.7. График к расчету сечения при одновременном действии момента  $M$  и осевой силы  $N$ :

1 — упругая стадия; 2 — упруго-пластическая стадия; 3 — пластический шарнир

Таким образом, обратный метод решения задач теории пластичности имеет большое практическое значение и может быть эффективно использован при решении конкретных вопросов проектирования стальных пролетных строений мостов.

### 5.5. НАГРУЖЕНИЕ ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ НОРМАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ (КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД)

В основе технической теории изгиба и кручения стержней лежит ряд положений геометрического характера, которые связывают перемещения точек сечения вдоль оси элемента с перемещениями элемента: осевыми, угловыми, деформацией.

Продольные перемещения какой-либо точки сечения

$$U(x) = U_0 + V'_1 y + W'_2 z - \Phi'_1 \omega, \quad (5.34)$$

где  $U_0$  — осевое перемещение сечения вдоль оси  $x$ ,  $V'$  — поворот сечения относительно оси  $z$ ;  $y, z$  — главные центральные оси инерции сечения;  $W'$  — поворот сечения относительно оси  $y$ ;  $\Phi'$  — деформация;  $\omega$  — главная секториальная площадь рассматриваемой точки.

Относительная деформация в точке

$$\varepsilon_x = U'_0 + V'' y + W'' z - \Phi'' \omega.$$

Зависимость между напряжениями и деформациями в упруго-пластической стадии по комбинированному методу имеет вид:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 + \nu \varepsilon_p} \varepsilon_x - \frac{E \varepsilon_p (1 - \nu)}{1 + \nu \varepsilon_p}, \quad (5.35)$$

Подставляя сюда выражение для  $\varepsilon_x$ , получим

$$\sigma_x = \frac{E}{1 + \nu \varepsilon_p} (U'_0 + V'' y + W'' z - \Phi'' \omega) - \frac{E \varepsilon_p (1 - \nu)}{1 + \nu \varepsilon_p}. \quad (5.35')$$

Используя выражение (5.35') для усилий в сечении получим зависимости относительно центральных осей и центра изгиба исходного сечения:

$$\left. \begin{aligned} N &= \int \sigma_x dF = EU'_0 \int \frac{dF}{1 + \nu \varepsilon_p} + EV'' \int \frac{y dF}{1 + \nu \varepsilon_p} + \\ &+ EW'' \int \frac{z dF}{1 + \nu \varepsilon_p} - E\Phi'' \int \frac{\omega dF}{1 + \nu \varepsilon_p} - E(1 - \nu) \int \frac{\varepsilon_p dF}{1 + \nu \varepsilon_p}; \\ M_y &= \int \sigma_x z dF = EU'_0 \int \frac{z dF}{1 + \nu \varepsilon_p} + EV'' \int \frac{zy dF}{1 + \nu \varepsilon_p} + \\ &+ EW'' \int \frac{z^2 dF}{1 + \nu \varepsilon_p} - E\Phi'' \int \frac{z\omega dF}{1 + \nu \varepsilon_p} - E(1 - \nu) \int \frac{z\varepsilon_p dF}{1 + \nu \varepsilon_p}; \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 M_z &= \int \sigma_x y dF = EU'_0 \int \frac{y dF}{1 + \nu \varepsilon_p} + EV'' \int \frac{y^2 dF}{1 + \nu \varepsilon_p} + \\
 &+ EW'' \int \frac{y z dF}{1 + \nu \varepsilon_p} - E\Phi'' \int \frac{y \omega dF}{1 + \nu \varepsilon_p} - E(1 - \nu) \int \frac{y \varepsilon_p dF}{1 + \nu \varepsilon_p}; \\
 B &= \int \sigma_x \omega dF = EU'_0 \int \frac{\omega dF}{1 + \nu \varepsilon_p} + EV'' \int \frac{\omega y dF}{1 + \nu \varepsilon_p} + \\
 &+ EW'' \int \frac{\omega z dF}{1 + \nu \varepsilon_p} - E\Phi'' \int \frac{\omega^2 dF}{1 + \nu \varepsilon_p} - E(1 - \nu) \int \frac{\omega \varepsilon_p dF}{1 + \nu \varepsilon_p}.
 \end{aligned} \right\} (5.36)$$

Данные выражения можно упростить, если их записать относительно новых осей сечения, положение которых находится из условия:

$$\begin{aligned}
 S_y &= \int \frac{z dF}{1 + \nu \varepsilon_p} = 0; & S_z &= \int \frac{y dF}{1 + \nu \varepsilon_p} = 0; & J_{zy} &= \int \frac{zy dF}{1 + \nu \varepsilon_p} = 0; \\
 S_\omega &= \frac{\omega dF}{1 + \nu \varepsilon_p} = 0; & J_{\omega y} &= \int \frac{z \omega dF}{1 + \nu \varepsilon_p} = 0; & J_{\omega z} &= \int \frac{y \omega dF}{1 + \nu \varepsilon_p} = 0; \\
 & & J_{\omega y} &= \int \frac{z \omega dF}{1 + \nu \varepsilon_p}.
 \end{aligned}$$

Усилия в сечении с учетом нового положения осей в главных координатах:

$$\left. \begin{aligned}
 N &= EU'_0 \int \frac{dF}{1 + \nu \varepsilon_p} - E(1 - \nu) \int \frac{\varepsilon_p dF}{1 + \nu \varepsilon_p}; \\
 M_y &= EW'' \int \frac{z^2 dF}{1 + \nu \varepsilon_p} - E(1 - \nu) \int \frac{z \varepsilon_p dF}{1 + \nu \varepsilon_p}; \\
 M_z &= EV'' \int \frac{y^2 dF}{1 + \nu \varepsilon_p} - E(1 - \nu) \int \frac{y \varepsilon_p dF}{1 + \nu \varepsilon_p}; \\
 B &= -E\Phi'' \int \frac{\omega^2 dF}{1 + \nu \varepsilon_p} - E(1 - \nu) \int \frac{\omega \varepsilon_p dF}{1 + \nu \varepsilon_p}.
 \end{aligned} \right\} (5.37)$$

Полученные выражения можно представить в иной форме:

$$U'_0 = \frac{N + \Delta \bar{N}}{EF \bar{\psi}_0}; \quad W'' = \frac{M_y + \Delta \bar{M}_y}{EJ \bar{\psi}}; \quad v'' = \frac{M_z + \Delta \bar{M}_z}{EJ_z \bar{\psi}_z}; \quad \Phi = -\frac{B + \Delta \bar{B}}{EJ_\omega \bar{\psi}_\omega}. \quad (5.38)$$

Здесь дополнительные усилия в сечении:

$$\begin{aligned}
 \Delta \bar{N} &= E(1 - \nu) \int \frac{\varepsilon_p dF}{1 + \nu \varepsilon_p}; & \Delta \bar{M}_y &= E(1 - \nu) \int \frac{z \varepsilon_p dF}{1 + \nu \varepsilon_p}; \\
 \Delta \bar{M}_z &= E(1 - \nu) \int \frac{y \varepsilon_p dF}{1 + \nu \varepsilon_p}; & \Delta \bar{B} &= E(1 - \nu) \int \frac{\omega \varepsilon_p dF}{1 + \nu \varepsilon_p};
 \end{aligned}$$

$$\bar{\psi}_0 = \frac{1}{F} \int \frac{dF}{1 + \nu \bar{\varepsilon}_p}; \quad \bar{\psi}_y = \frac{1}{J_y} \int \frac{z^2 dF}{1 + \nu \bar{\varepsilon}_p};$$

$$\bar{\psi}_z = \frac{1}{J_z} \int \frac{y^2 dF}{1 + \nu \bar{\varepsilon}_p}; \quad \bar{\psi}_\omega = \frac{1}{J_\omega} \int \frac{\omega^2 dF}{1 + \nu \bar{\varepsilon}_p}.$$

Выражения (5.38) отражают комбинированный метод деформационной теории пластичности для случая тонкостенного стержня, нагруженного нормальными напряжениями.

Деформации к напряжениям в точках сечения, находящегося в упругопластической стадии:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{N + \Delta \bar{N}}{EF \bar{\psi}_0} + \frac{M_z + \Delta \bar{M}_z}{EJ_z \bar{\psi}_z} y + \frac{M_y + \Delta \bar{M}_y}{EJ_y \bar{\psi}_y} z + \frac{B + \Delta \bar{B}}{EJ_\omega \bar{\psi}_\omega} \omega; \\ \sigma_x &= \frac{1}{1 + \nu \bar{\varepsilon}_p} \left( \frac{N + \Delta \bar{N}}{F \bar{\psi}_0} + \frac{M_z + \Delta \bar{M}_z}{J_z \bar{\psi}_z} y + \frac{M_y + \Delta \bar{M}_y}{J_y \bar{\psi}_y} z + \frac{B + \Delta \bar{B}}{J_\omega \bar{\psi}_\omega} \omega \right) - \frac{E \varepsilon_p (1 - \nu)}{1 + \nu \bar{\varepsilon}_p}. \end{aligned} \right\} (5.39)$$

Рассчитывать сечения нужно по методу последовательных приближений, выполняя в каждом приближении упругий расчет сечения с измененными геометрическими характеристиками и дополнительными усилиями. Критерий прочности здесь тоже пластическая деформация.

Используя зависимости (5.38), можно записать дифференциальные уравнения равновесия тонкостенного стержня в главных координатах с учетом развития пластических деформаций:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} (EF \bar{\psi}_0 U_0)' &= q_x + \frac{d}{dx} \Delta \bar{N}; \quad \frac{d^2}{dx^2} (EJ_y \bar{\psi}_y W'') = \\ &= q_z + \frac{d^2}{dx^2} \Delta \bar{M}_y; \\ \frac{d^2}{dx^2} (EJ_z \bar{\psi}_z V'') &= q_y + \frac{d^2}{dx^2} \Delta \bar{M}_z; \\ \frac{d^2}{dx^2} (EJ_\omega \bar{\psi}_\omega \Phi'') &= m + \frac{d^2}{dx^2} \Delta \bar{B}. \end{aligned} \right\} (5.40)$$

Имея в виду, что чистое кручение при развитии пластичности от нормальных напряжений подчиняется линейной зависимости, уравнение (5.40) на основе теории течения можно представить в таком виде:

$$\frac{d^2}{dx^2} (EJ_\omega \bar{\psi}_\omega \Phi'') - GJ_R \Phi'' = -m + \frac{d^2}{dx^2} \Delta \bar{B}, \quad (5.41)$$

Выражения (5.40) — о б о б щ е н и е уравнений теории тонкостенных стержней в упругопластической стадии при использовании комбинированного метода.

## 5.6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И РАСЧЕТ БАЛОЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Определение перемещений — важнейший этап во всех видах расчетов. При развитии ограниченных пластических деформаций имеют место особенности в их вычислении. Рассмотрим два характерных случая: 1) растяжение (сжатие) с одновременным изгибом и чистым кручением замкнутого недеформирующего сечения; 2) растяжение (сжатие) с одновременным изгибом и стесненным кручением сечения открытого профиля с исчезающе малой жесткостью чистого кручения. Формулы для определения перемещений для первого ( $\Delta_1$ ) и второго ( $\Delta_2$ ) случаев:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= \sum \int \bar{N} \varepsilon_p dx + \sum \int \bar{M} \kappa_p dx + \sum \int \bar{M}_K \Phi_p' dx; \\ \Delta_2 &= \sum \int \bar{N} \varepsilon_p dx + \sum \int \bar{M} \kappa_p dx + \sum \int \bar{B} \Phi_p'' dx \end{aligned} \right\} \quad (5.42)$$

при  $\kappa_p = 1/r_0$ ;  $\Phi_p' = \gamma/r_0$

где  $\bar{N}$ ,  $\bar{M}$ ,  $\bar{M}_K$ ,  $\bar{B}$  — силовые факторы от единичной нагрузки, приложенной в направлении искомого перемещения;  $\varepsilon_p$ ,  $\kappa_p$ ,  $\Phi_p'$ ,  $\Phi_p''$  — кинематические факторы, вызываемые внешней нагрузкой;  $r_0$  — радиус вписанного круга.

Выражение  $\int \bar{B} \Phi_p'' dx$  — это работа внутренних сил в сечении  $dV = -dx \int \bar{\sigma}_\omega \varepsilon_p dF = -dx \int \frac{\bar{B}\omega}{J_\omega} \Phi_p'' \omega dF = -\bar{B} \Phi_p'' dx$ , и соответственно  $V = -\int \bar{B} \Phi_p'' dx$ .

Учитывая формулы для напряжений  $\sigma_x = E\varepsilon_x \alpha$  и  $\tau_{xy} = E\gamma_{xy} \alpha/3$ , при  $\alpha = (1 + E\varepsilon_{ip}/\sigma_i)^{-1}$ , рассмотрим выражения для кинематических факторов.

Растяжение:  $N = \int \sigma dF = \int E\varepsilon_x \alpha dF = E\varepsilon_x \int \alpha dF$  или  $\varepsilon_x = \frac{N}{E \int \alpha dF} = \frac{N}{EF\psi_p}$  при  $\psi_p = \frac{1}{F} \int \alpha dF$ .

Изгиб:  $\varepsilon_x = \frac{z}{\rho}$ ;  $\sigma_x = E\alpha \frac{z}{\rho}$  и  $M = \int \sigma_x z dF = \frac{E}{\rho} \int \alpha z^2 dF$ , или  $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \int \alpha z^2 dF} = \frac{M}{EJ_{\psi_K}}$  при  $\psi_K = \frac{1}{J} \int \alpha z^2 dF$ .

Чистое кручение:  $M_K = \oint \tau \delta r_0 ds = \oint G\gamma \alpha \delta r_0 ds = G\gamma \oint \alpha \delta r_0 ds$ . Отсюда  $\gamma = M_K / (G \oint \alpha \delta r_0 ds)$ , учитывая, что  $\gamma/r_0 = \Phi'$ , получим  $\Phi' = M_K / (GJ_K \psi_K)$  при  $\psi_K = \frac{1}{J_K} \oint \alpha \delta r_0^2 ds$ , а  $J_K = \oint \delta(s) r_0^2 ds$  при  $\delta = \text{const}$ ,  $J_K = \omega_K \delta r_0$ ,  $\omega_K = \oint r_0 ds$ .

Степенное кручение:  $E_1 = E/(1 - \mu^2)$  и  $B = \int \sigma_\omega \omega dF := \int E_1 \varepsilon_x \alpha \omega dF = - \int \alpha E_1 \Phi'' \omega^2 dF$ ;  $\varepsilon = u' = -\Phi' \omega$ ;  $u = -\Phi \omega$ , тогда  $\Phi'' = B/(E_1 J_\omega \psi_\omega)$  при  $\psi_\omega = \frac{1}{J_\omega} \int \alpha \omega^2 dF$ .

Полученные здесь функции пластичности в сечении при одновременном действии нескольких силовых факторов зависят от  $\alpha$ . Окончательно с учетом изложенного формулы (5.42) могут быть представлены в виде:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= \sum \frac{\bar{N} N_p}{EF \psi_p} dx + \sum \int \frac{\bar{M} \bar{M}_p}{EJ \psi_H} dx + \sum \int \frac{\bar{M}_K M_K}{GJ_K \psi_K} dx; \\ \Delta_2 &= \sum \int \frac{\bar{N} N_p}{EF \psi_p} dx + \sum \int \frac{\bar{M} M_p}{EJ \psi_H} dx + \sum \frac{\bar{B} B_p}{E_1 J_\omega \psi_\omega} dx. \end{aligned} \right\} (5.43)$$

Эти формулы — обобщение интеграла Мора на упругопластическую стадию и следствие применения метода переменных параметров упругости [6].

Если использовать метод дополнительных нагрузок, то

$$\left. \begin{aligned} \Delta_2 &= \sum \int \frac{\bar{N} (N_p + \Delta N)}{EF} dx + \sum \int \frac{\bar{M} (M_p + \Delta M)}{EJ} dx + \\ &+ \sum \int \frac{\bar{B} (B_p + \Delta B)}{E_1 J_\omega} dx. \end{aligned} \right\} [(5.44)$$

$$\text{при } \Delta N = E \int \varepsilon_p d\bar{F}; \Delta M = E \int \varepsilon_p z d\bar{F}; \Delta B = E_1 \int \varepsilon_p \omega dF.$$

Наиболее общую формулу для определения перемещений стержня в упругопластической стадии дает комбинированный метод автора. Для тонкостенного стержня с исчезающе малой жесткостью чистого кручения формула Мора может быть представлена в виде:

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= \sum \int \frac{\bar{N} (N + \Delta \bar{N})}{EF \bar{\psi}_0} dx + \sum \int \frac{\bar{M}_y (M_y + \Delta \bar{M}_y)}{EJ_y \bar{\psi}_y} dx + \\ &+ \sum \int \frac{\bar{M}_z (M_z + \Delta \bar{M}_z)}{EJ_z \bar{\psi}_z} dx + \sum \int \frac{\bar{B} (B + \Delta \bar{B})}{EJ_\omega \psi_\omega} dx. \end{aligned} \right\} (5.45)$$

Обозначения см. п.5.5. §

Для изгибаемых элементов, имеющих сечения с двумя осями симметрии, в общем случае максимальная относительная деформация для крайней фибры

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_T A(c, \lambda),$$

где  $\varepsilon_T$  — деформация, соответствующая пределу текучести;  $A$  — величина, зависящая от отношения  $c = M_{\text{пл}}/M_T$  и параметра  $\lambda$ , характеризующего упрочнение;  $M_{\text{пл}} \geq M_T$ .

Используя это выражение, получим зависимость для кривизны

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)_{\text{пл}} = \frac{\varepsilon_{\text{max}}}{h} = \frac{\varepsilon_{\text{T}}}{h} A(c, \lambda).$$

Учитывая, что  $\varepsilon_{\text{T}}/h = M_{\text{пл}}/(EJc)$ , можно записать:

$$(1/\rho)_{\text{пл}} = M_{\text{пл}}/(EJ\psi_{\text{н}}); \quad \psi_{\text{н}} = c/[A(c, \lambda)].$$

Здесь  $h$  — половина высоты сечения;  $\psi_{\text{н}}$  — функция пластичности для всего сечения стержня.

Для решения задач изгиба балок методом дополнительных нагрузок выражение для дополнительного момента находят из условия

$$J\psi_{\text{н}} = JM_{\text{пл}}/(M_{\text{пл}} + \Delta M).$$

Отсюда  $\Delta M/M_{\text{T}} = A(c, \lambda) - c$  или  $\Delta M = M_{\text{T}} [A(c, \lambda) - c]$ .

Таким образом, функция пластичности  $\psi_{\text{н}}$  сечения, а также дополнительный момент  $\Delta M$  в этом сечении зависят от функции  $A(c, \lambda)$ , которая для различных видов сечений и типа диаграммы деформирования может быть табулирована. Для диаграммы деформирования с упрочнением (с модулем  $E'$ )

$$A(c, \lambda) = 1 + \varepsilon_{\text{p max}}/(\varepsilon_{\text{T}} \lambda); \quad (5.46)$$

значение  $\varepsilon_{\text{p max}}$  зависит от  $c = M_{\text{пл}}/M_{\text{T}}$ ;  $\lambda = 1 - E'/E$ . Следовательно,  $A(c, \lambda) \geq 1$ , а для упругой стадии работы сечения  $A(c, \lambda) = 1$ ; при образовании пластического шарнира  $A(c, \lambda) = 1$ ; при образовании пластического шарнира  $A(c, \lambda)$ , по значению стремится к бесконечности (при  $\lambda = 1$ , что соответствует диаграмме Прандтля).

Величина  $\varepsilon_{\text{p max}}$  зависит от действующего в сечении изгибающего момента  $M_{\text{пл}}$  и в случае коробчатого сечения и диаграммы Прандтля может быть выражена по формуле, полученной автором [47]:

$$\varepsilon_{\text{p max}} = \varepsilon_{\text{T}} \left( \sqrt{\frac{1}{3 - 2c + 6a(1 - c)}} - 1 \right) \quad \text{при } a = \frac{\Sigma F_{\text{пол}}}{\Sigma F_{\text{ст}}}.$$

Если  $a = 0$ , получим формулу для прямоугольного сечения. Окончательно для рассматриваемого случая функция  $A(c, \lambda = 1)$  имеет вид

$$A(c) = \sqrt{[3 - 2c + 6a(2 - c)]^{-1}}. \quad (5.47)$$

Дифференциальное уравнение изгиба балок по методу переменных параметров упругости

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \psi_{\text{н}}(x) \right] = q,$$

или в развернутом виде

$$EJ\psi_{\text{н}}(x) \frac{d^4 w}{dx^4} + EJ \frac{d^2 \psi_{\text{н}}(x)}{dx^2} \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} = q. \quad (5.48)$$

Дифференциальное уравнение изгиба балки по методу дополнительных нагрузок:

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} = q + \frac{d^2}{dx^2} \Delta M(x). \quad (5.49)$$

Возможна другая запись дифференциального уравнения, а именно:

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} = q - \frac{d^2}{dx^2} [(M_{упр} \alpha)] \quad (5.50)$$

$$\text{при } \alpha = \frac{(1-k^2)}{1+3a} \left( 1 + \frac{k}{2} + \frac{3a}{1-k} \right); \quad k = \frac{1}{1 + \varepsilon_{p \max} / \varepsilon_T},$$

где  $M_{упр}$  — изгибающий момент в сечении, соответствующий упругому закону распределения напряжений и деформаций.

Эта форма записи удобна при использовании метода последовательных приближений.

Для иллюстрации изложенного приведены на рис. 5.8 кривые зависимостей  $\psi_{II}$  и  $\Delta M/M_T$  от степени исчерпания несущей способности сечения. Отметим некоторые особенности этих кривых. При значении аргумента  $c = M_{пл}/M_T$ , равном 1,0, функция пластичности равна тоже 1,0, а дополнительный момент — нулю. Это — граничное состояние, соответствующее переходу в упругопластическую стадию. При значениях аргумента, равных:  $c_1 = 1,04$  ( $a = 4$ );  $c_2 = 1,125$  ( $a = 1$ );  $c_3 = 1,31$  ( $a = 0,2$ ) и  $c_4 = 1,5$  ( $a = 0$ ), функция пластичности равна нулю, что выражает факт образования в сечении пластического шарнира. Этим же значениям аргумента соответствуют асимптомы на графике для дополнительного момента. Таким образом, при функции пластичности, равной нулю, дополнительные моменты стремятся к бесконечно большим значениям. Следовательно, в данном случае несущая способность сечения и с ч е р п а н а полностью.

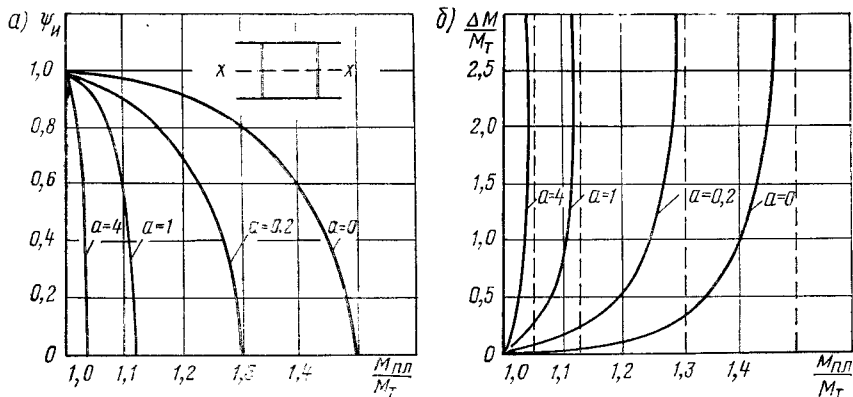


Рис. 5.8. Зависимости для функции пластичности  $\psi_{II}$  и дополнительных моментов  $\Delta M/M_T$  от  $M_{пл}/M_T$  при различных значениях  $a$



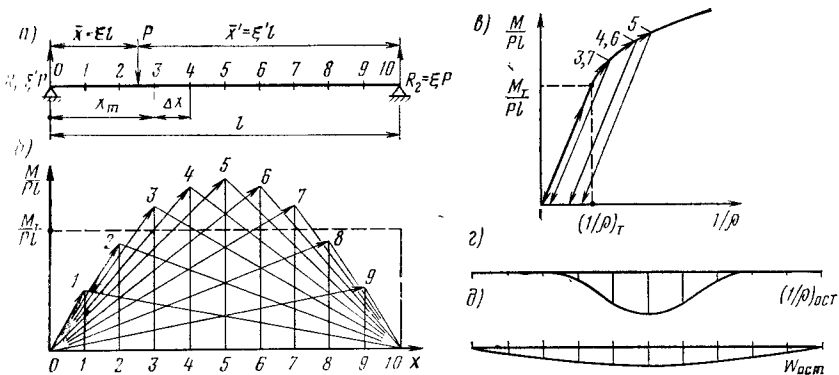


Рис. 5.9. Графики и эпюры к расчету балки на подвижную нагрузку

Расчеты статически неопределимых систем, включая многобалочные конструкции, показывают [47], что при ограниченном развитии пластических деформаций, в конструкции в первую очередь реализуются резервы несущей способности сечения ( $c_1$ ), а затем — связанные со статической неопределимостью системы ( $c_2$ ).

Например, в многобалочной конструкции при  $\epsilon_p = 0,0006$  имеет место  $c_1 = 1,25$  и  $c_2 = 1,01$ , при  $\epsilon_p = 0,0025$  — соответственно  $c_1 = 1,43$  и  $c_2 = 1,13$ . Отсюда следует, что при  $\epsilon_p = 0,0006$  еще не происходит заметного перераспределения усилий.

Для двухпролетной неразрезной балки  $2 \times 60_m$ , имеющей коробчатое сечение из стали с криволинейной диаграммой деформирования, произошло (за счет развития пластичности) незначительное изменение изгибающих моментов — в пролете с 9,17 до 9,33, а на опоре с 11,00 до 10,67 условных единиц. При этом в сечении на опоре максимальные относительные деформации составили 0,00712 (т. е.  $4 \epsilon_T$ ), а пластические — 0,00527.

**Особенность** расчета на подвижную нагрузку в упруго-пластической стадии по сравнению с упругой — усилия и перемещения в каком-либо сечении при данном положении нагрузки в общем случае зависят от воздействий нагрузки при всех предыдущих ее положениях. В статически определимых балках это отражается только на перемещениях.

Рассмотрим свободно опертую балку постоянного сечения с движущимся по ней грузом (рис. 5.9, а). Для каждого сечения построим линии влияния от заданного груза (рис. 5.9, б) и на том же графике отложим значение изгибающего момента, соответствующего началу текучести. Проследим движение нагрузки по балке. Вначале, когда груз находится в сечениях 1 и 2, балка работает в упругой стадии. При переходе нагрузки в сечение 3 возникают пластические деформации, и балка начинает работать в нелинейной стадии. Дальнейшее движение груза вызывает пластические деформации в новых сече-

ниях, а в предыдущих — разгрузку вследствие уменьшения изгибающих моментов. Прогиб балки в данной точке можно вычислить через значения кривизны, заданные во всех сечениях, при фиксированном положении груза. Необходимо учитывать при этом, что в сечениях, подвергающихся пластическим деформациям, зависимость кривизны от момента неоднозначна и ее нужно принимать соответственно при нагружении и разгрузке.

Например, при положении груза в точке 5 кривизна в той же точке берется по кривой активного нагружения, а для точек 3 и 4 по линии разгрузки. В точках 1 и 2, 8 и 9 кривизна вычисляется по формуле  $1/\rho_i = M_i/(EJ)$ . В точках 3, 4, 5, 6 и 7 кривизна берется из графика (рис. 5.9, е).

Зная значения остаточной кривизны после прохождения нагрузки (рис. 5.9, з), можно вычислить остаточный прогиб (рис. 5.9, д) для точки с абсциссой  $x_m$ :

$$\omega_{x_m} = \varphi_0 x_m + \sum_{i=1}^m \frac{\Delta x_i}{\rho_i} (x_m - x_i) \quad \text{при} \quad \varphi_0 = - \sum_{i=1}^n \frac{\Delta x_i}{\rho_i} \left(1 - \frac{x_i}{l}\right).$$

Аналогичным образом можно рассмотреть движение по балке системы связанных между собой грузов.

Представляет интерес случай нагрузки в виде сплошной полосы, надвигающейся на пролетное строение. В каждом сечении при этом будет иметь место активное нагружение, т. е. возрастание усилия, что объясняется неоднозначностью линий влияния для соответствующих сечений. Как следствие этого — статическая нагрузка, приложенная к балке на некоторой длине, эквивалентна подвижной. Таким образом, воздействие полосовой нагрузки на однопролетные балки равносильно многократному приложению статической нагрузки, распределенной по всей длине пролетного строения.

Более сложные случаи статически определимых систем также могут быть рассмотрены по изложенному методу, например, двухпролетная балка с шарниром (рис. 5.10, а). Принимая нагрузку в виде сплошной полосы, обозначим координатой  $x$  ее положения при движении на пролетное строение и  $x'$  — при сходе с него. При движении нагрузки на пролетное строение распространение пластичности идет как вдоль, так и по высоте балки.

За изменением усилий (момента) в сечении можно проследить, пользуясь линиями влияния, например, для точки 2 (рис. 5.10, б) в координатах  $M_2 - \chi (x')$ . При движении нагрузки изменение момента идет по линии  $OA$ , причем точке  $A$  соответствует ограниченное развитие пластичности в сечении 2. При перемещении нагрузки по пролетному строению (пролет  $l_2$ ) момент уменьшается и точка  $B$  соответствует полному загрузению пролетного строения в пролетах  $l_1$  и  $l_2$ , если длина полосы нагрузки  $l \geq l_1 + l_2$ .

При сходе нагрузки с участка пролетом  $l_1$  (что характеризуется переменной  $x'$ ) происходит дальнейшее уменьшение момента, причем точка  $c$  соответствует минимальному его значению. После схода

нагрузки с участка пролета  $l_2$  момент равен нулю, а значение остаточной кривизны в сечении 2 будет  $1/\rho_{ост}$ .

В рассматриваемом примере усилие в сечении изменяло знак на обратный, но при этом не учитывалось влияние начального усилия, например, от собственного веса. Пусть начальный изгибающий момент в сечении 2 равен  $\bar{M}_2^{(0)}$  и соответственно начальная кривизна —  $1/\rho_0$ . При таком начальном напряженном состоянии полосовая

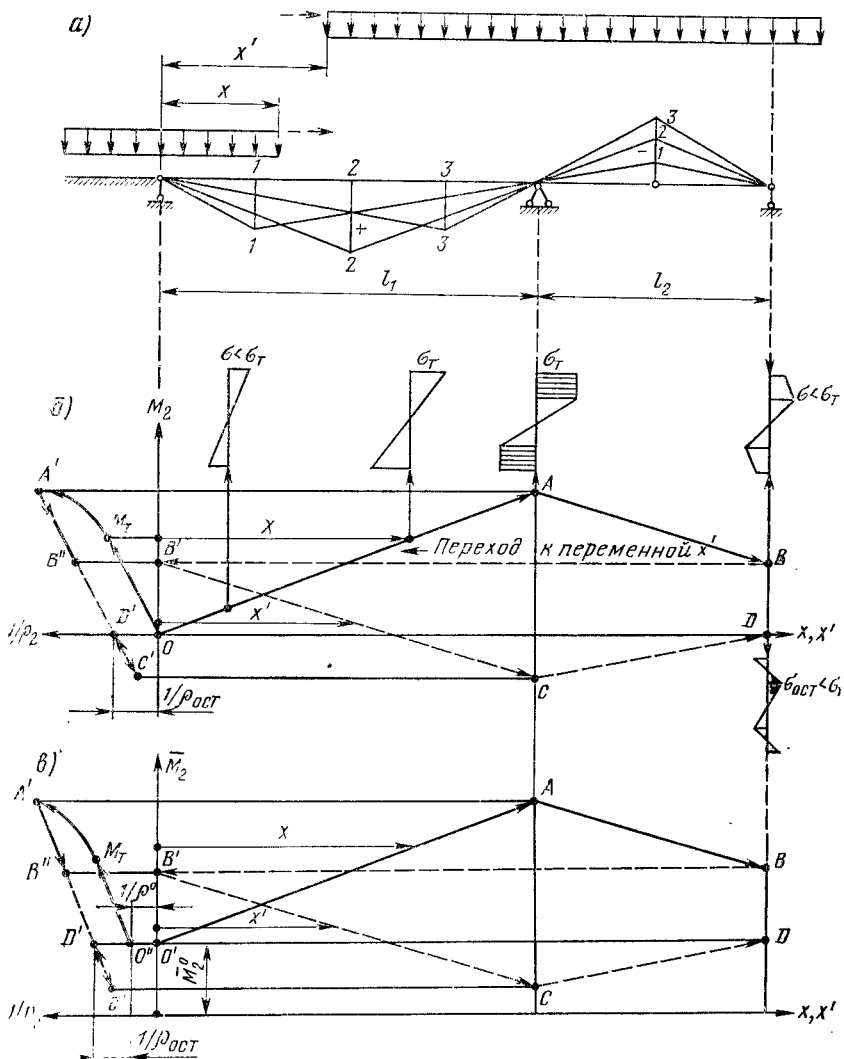


Рис. 5.10. Схемы и линии влияния к расчету двухпролетной балки на подвижную нагрузку

нагрузка надвигается на участки пролетами  $l_1$  и  $l_2$ , после чего начинается ее сход (рис. 5.10, в).

Таким образом, для любого сечения можно проследить изменение его напряженного состояния и найти как остаточные (упругие) напряжения, так и остаточную кривизну после прохода нагрузки. Остаточную линию прогибов целесообразно находить численным способом. Следует отметить, что проход расчетной нагрузки, согласно методике предельных состояний, возможен лишь один раз, что при развитии пластических деформаций означает наступление предельного состояния.

Для статически неопределимых систем, например неразрезных балок, рассмотренные расчеты сильно усложняются и для практических целей можно рекомендовать использование упругих линий влияния при определении невыгодного положения нагрузки и на эти нагружения вести упругопластические расчеты. В общем случае расчет статически неопределимых систем с учетом ограниченного развития пластических деформаций на подвижную нагрузку заслуживает самостоятельного исследования.

### 5.7 ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ СТАЛИ ПРИ УЧЕТЕ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

Учет в расчетах пластических деформаций позволяет более полно и эффективно использовать несущую способность стали в конструкциях пролетных строений мостов. Степень использования несущей способности материала с расчетным сопротивлением  $R$  в заданном объеме  $V$  конструкции можно характеризовать коэффициентом эффективности использования материала

$$K_э = \frac{\int_V \sigma_i dV}{V R} \leq 1, \quad (5.54)$$

Очевидно, что в случае неравномерного распределения напряжений в материале (градиентное напряженное состояние), эффективность его использования зависит от вида принятого критерия предельного состояния. Критерий точечной текучести дает завышение несущей способности и ведет к неоправданному перерасходу материала. Достижение предельного равновесия, которое дает  $K_э = 1$ , для реальных конструкций невозможно (см. п.1.4).

В качестве примера расчета по ограниченным пластическим деформациям рассмотрим наиболее типичный случай изгибаемых элементов.

Для коробчатого (двутаврового) сечения с двумя осями симметрии коэффициент эффективности:

$$K_э = \frac{1 + (\Sigma F_{II}) / (\Sigma F_{CT}) - 0,5k}{1 + (\Sigma F_{II}) / (\Sigma F_{CT})} \text{ при } k = (1 + E\varepsilon_p / R)^{-1}, \quad (5.55)$$

где  $\Sigma F_{\text{п}}$ ,  $\Sigma F_{\text{ст}}$  — соответственно суммарная площадь полок и стенок сечения;  $\varepsilon_p$  — заданная пластическая деформация.

Из зависимости  $K_{\alpha}$  от пластической деформации для коробчатого сечения при различных значениях  $\alpha$  ( $\Sigma F_{\text{п}}/(\Sigma F_{\text{ст}})$ ) и  $R = 320$  МПа (рис. 5.11, сплошные кривые) видно, что:

1) при  $\alpha = 0$  (прямоугольное сечение) коэффициент эффективности равен  $K_{\alpha} = 0,5$  при  $\varepsilon_p = 0$ ;  $K_{\alpha} = 0,642$  при  $\varepsilon_p = 0,0006$ ,  $K_{\alpha} = 0,81$  при  $\varepsilon_p = 0,0025$ ;

2) при  $\alpha = 0,2$ , коэффициент  $K_{\alpha} = 0,583$  при  $\varepsilon_p = 0$ ,  $K_{\alpha} = 0,700$  при  $\varepsilon_p = 0,0006$ ,  $K_{\alpha} = 0,840$  при  $\varepsilon_p = 0,0025$ ;

3) при  $\alpha = 1$  коэффициент  $K_{\alpha} = 0,75$  при  $\varepsilon_p = 0$ ,  $K_{\alpha} = 0,82$  при  $\varepsilon_p = 0,0006$ ,  $K_{\alpha} = 0,905$  при  $\varepsilon_p = 0,0025$ .

Таким образом, пластическая деформация, например в размере 0,0006, повышает эффективность использования стали в рассмотренном примере на 3—28%.

Представляет интерес оценить степень использования несущей способности материала в поясах при неравномерном распределении напряжений по ширине поперечного сечения. В узких мостах материал поясов используется полностью, так как имеет место равномерное распределение напряжений. При неравномерном распределении напряжений по ширине пояса учет в расчетах пластических деформаций позволяет существенно повысить коэффициент эффективности, доводя его в некоторых случаях до единицы (рис. 5.11, штриховые кривые)

В практических расчетах повышение коэффициента  $K_{\alpha}$  отражает коэффициент  $c$  для изгибаемых элементов, а в общем случае определяется отношением допустимых усилий на элемент при различных значениях пластической деформации.

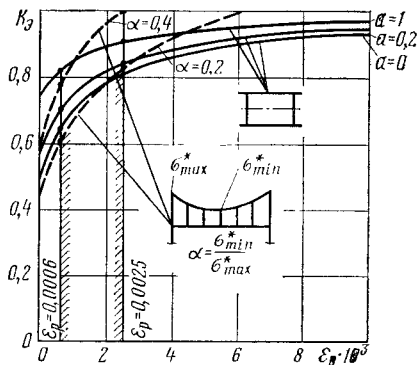


Рис. 5.11. Зависимости коэффициента  $K_{\alpha}$  эффективности использования стали от пластической деформации  $\varepsilon_p$

## 6. УСТОЙЧИВОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СТАДИИ

### 6.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ И КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

Общую и местную устойчивость стальных элементов конструкций мостов в соответствии с условиями их работы нужно рассчитывать по упруго-пластической (реже упругой) стадии работы материала. Расчетом должны быть проверены: 1) устойчивость формы сжатых и сжато-изогнутых элементов пролетных строений и

опор; 2) общая устойчивость отдельных (или групп) сплошных главных балок и балок проезжей части; 3) общая пространственная устойчивость монтируемой в навес или надвигаемой консоли пролетного строения (двух или более балок или ферм, соединенных связями); 4) местная устойчивость пластинчатых элементов двутавровых и коробчатых балок, особенно вблизи опорных сечений. От правильного решения вопросов устойчивости существенным образом зависит надежность и экономичность сооружений.

На устойчивость конструкций значительное влияние оказывают начальные несовершенства (начальные искривления, остаточные напряжения), которые в той или иной мере должны быть учтены в расчетах. Расчеты на устойчивость должны также отражать действительную диаграмму деформирования материала, для чего необходимо рассмотреть упругопластическую стадию работы. Только в этом случае можно правильно оценить реальную несущую способность сооружения.

Критерии устойчивости должны учитывать все перечисленные обстоятельства.

Математические методы решения задач (уравнений) устойчивости по своей эффективности весьма разнообразны, но решающее значение принадлежит постановке задачи, учету в соответствующих дифференциальных уравнениях факторов (параметров), отражающих действительную работу элементов конструкции. Между теоретическими исследованиями и практическим их применением в нормах, всегда имеется определенный интервал, что заставляет одновременно рассматривать эти аспекты.

Критерии устойчивости равновесия (потеря устойчивости I-го рода) — потеря устойчивости, связанная с появлением новых форм равновесия.

Наиболее общий (но и сложный) динамический критерий, применимый для консервативных и неконсервативных систем, а также для упругих и упругопластических. Для консервативной системы достаточное условие устойчивости — минимум потенциальной (полной) энергии (признак Лагранжа — Дирихле). Для упругих систем наиболее часто используют статический и энергетический критерии, которые, вообще говоря, применимы для консервативных систем. Эффективен для определения критических нагрузок в ряде случаев метод изучения системы с начальными отклонениями (несовершенствами).

Упругопластические системы — неконсервативны, однако применение общего динамического критерия чрезвычайно затруднено. Возможно применение метода изучения системы с начальными отклонениями. Обычно применяют некоторый статический критерий, разыскивая нагрузку, для которой возможны различные близкие формы равновесия при тех или иных дополнительных условиях. Здесь оказывается полезной — концепция Шенли — наименьшей нагрузкой, при которой становится возможным искривление в условиях возрастания сжимающей силы, является кас-

тельно-модульная нагрузка (в момент бифуркации разгрузка в точках сечений отсутствует). Эта концепция в ряде случаев позволяет получить сравнительно просто нижнее значение критической нагрузки.

Критерии устойчивости деформирования (потеря устойчивости 2-го рода) — потеря устойчивости, как правило не связанная с появлением новых форм равновесия. Вследствие нецентрального приложения нагрузок, начальных искривлений деформации системы (стержня) возрастают с самого начала приложения нагрузок — это естественный характер деформирования. За исключением особых случаев деформирования и вида диаграмм материала наиболее общим критерием здесь нужно считать критерий нулевой отпорности  $\frac{dP}{df} = 0$ , соответствующий исчерпанию несущей способности (здесь  $P$  — характерная сила,  $f$  — характерное перемещение). Этому критерию соответствует, как правило, упругопластическая стадия работы материала.

В практических расчетах находит применение также критерий «устойчивой прочности» — достижение в наиболее напряженном сечении (точке) предела текучести материала или заданной деформации (напряжении).

## 6.2. ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА СТЕРЖНЕЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

Установление устойчивости 1-го рода упругих статических неопределимых стержневых систем сводится к решению проблемы собственных значений. Для каждого сжатого стержня может быть найден критический параметр

$$v_i = l_i \sqrt{N_{kri} / (E_i J_i)},$$

а также расчетная (приведенная) гибкость

$$\bar{\lambda}_i = \frac{\pi}{v_i} \lambda_i.$$

Здесь  $\lambda_i$  вычисляется по геометрической длине.

Чтобы учесть возможную потерю устойчивости некоторыми стержнями в упругопластической стадии, можно применить теорию касательного модуля и рассчитывать последовательными приближениями.

Для стержня  $i$  касательный модуль

$$E_{ki} = E_i \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_{ki} - \sigma_{\pi i}}{\sigma_T - \sigma_{\pi i}} \right)^2 \right] \quad \text{при } \sigma_{ki} = \quad (6.1)$$

$$\left( \sigma_{\pi} - \frac{(\sigma_T - \sigma_{\pi})^2}{2\pi^2 E_i} \bar{\lambda}_i^2 \right) \pm \left[ \left( \sigma_{\pi} - \frac{(\sigma_T - \sigma_{\pi})^2}{2\pi^2 E_i} \bar{\lambda}_i^2 \right)^2 - \sigma_T (2\sigma_{\pi} - \sigma_T) \right]^{1/2},$$

где  $E_i$  — модуль упругости  $i$ -го стержня;  $\sigma_{\pi}$  — предел пропорциональности;  $\sigma_T$  — предел текучести,

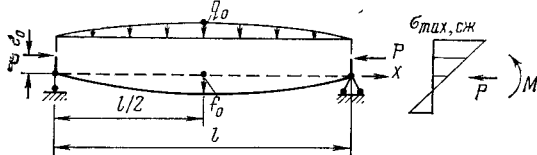


Рис. 6.1. Схема и усилия сжатого стержня

Устойчивость 2-го рода упругих статически неопределимых стержневых систем на основе критерия «устойчивой прочности» определяется деформационным расчетом системы и контролем максимальных напряжений (деформаций) в наиболее напряженных стержнях (сечениях, точках). Устойчивость 2-го рода упругопластических статически неопределимых стержневых систем на основе критерия нулевой отпорности ограничивается критической нагрузкой, соответствующей исчерпанию несущей способности. Систему рассматривают как единую физически и геометрически нелинейную, а расчет ведут методом итераций по схеме сечение-стержень-система. Основой для расчета служит решение для сжато-изогнутого стержня в основной системе метода сил или метода перемещений. При учете пластических деформаций эффективным оказывается метод упругих решений в одной из его форм — дополнительных нагрузок или переменных параметров упругости.

Поведение сжато-изогнутого стержня в основной системе метода сил или метода перемещений может быть оценено только численным методом, т. е. вычислением перемещений и реакций. В общем случае нужно интегрировать при соответствующих граничных условиях уравнение с переменными коэффициентами:

$$[EJ(z)v''(z)]'' + [N(z)v'(z)]' = q(z) - [N(z)v_0'(z)]', \quad (6.2)$$

где  $v_0(z)$  — начальный прогиб;  $J(z)$ ,  $N(z)$ ,  $q(z)$  — функции, известные для  $i$ -ой итерации.

В методе дополнительных нагрузок за счет пластических деформаций меняются  $N(z)$  и  $q(z)$ , а в методе переменных параметров упругости  $J(z)$ .

Дифференциальное уравнение изгиба стержня (рис. 6.1) имеет вид:  $EJ\omega'' = -M$  (где  $M$  — изгибающий момент в поперечных сечениях). В случае сжато-изогнутого стержня, имеющего начальное искривление, изгибающий момент

$$M = M_q + P(e_0 + f_0 + \omega),$$

где  $M_q$  — изгибающий момент от внешней поперечной нагрузки.

Будем считать, что эта нагрузка представляет собой синусоиду с амплитудой  $q_0$ , тогда

$$M_q = \frac{q_0 l^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Начальный изгиб стержня также примем изменяющимся по синусоидальному закону

$$\omega_0 = f_0 \sin(\pi x/l).$$



Решение дифференциального уравнения будем искать в виде  $a_1 \sin(\pi x/l)$ . Учитывая это, изгибающий момент от внецентренного приложения сжимающей силы, равен  $1,27 P e_0 \sin(\pi x/l)$ . После подстановок и преобразований получим выражение для значения искомого коэффициента  $a_1$ , т. е. для амплитудного значения второго прогиба

$$a_1 = \left( EJ \frac{\pi^2}{l^2} - P \right)^{-1} \left( \frac{q_0 l^2}{\pi^2} + 1,27 P e_0 + P f_0 \right).$$

Максимальный изгибающий момент

$$M_{\max} = EJ \omega_1'' = \left( \frac{\pi^2}{l^2} - \frac{P}{EJ} \right)^{-1} \left( \frac{q_0 l^2}{\pi^2} + 1,27 P e_0 + P f_0 \right).$$

Критерий устойчивой прочности в данном случае требует ограничения максимального сжимающего напряжения  $\sigma_{\max, сж}$  значением расчетного сопротивления  $R$ , т. е.

$$\sigma_{\max сж} = P/F + M_{\max}/W_{сж} = R,$$

где  $W_{сж}$  — момент сопротивления волокна с максимальным сжимающим напряжением.

Из последнего выражения может быть определена допустимая сжимающая сила  $P$  или соответствующее допустимое среднее напряжение  $\sigma_0 = P/F$ . После преобразований и решения квадратного уравнения получим

$$\sigma_0 = \frac{R}{2} + \frac{\pi^2 E}{2\lambda^2} (1 + \bar{f}_0 + 1,27 \bar{e}_0) - \left\{ \left[ \frac{R}{2} + \frac{\pi^2 E}{2\lambda^2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (1 + \bar{f}_0 + 1,27 \bar{e}_0) \right]^2 - \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} (R - \sigma_q сж) \right\}^{1/2}, \quad (6.3)$$

$$\text{при } \bar{f}_0 = f_0 F/W_{сж}, \quad \bar{e}_0 = e_0 F/W_{сж},$$

$$\sigma_q сж = M_q/W_{сж},$$

где  $\lambda$  — гибкость стержня.

Формула (6.3) выражает критическое сжимающее напряжение на основе критерия устойчивой прочности в упругой стадии работы стержня, а точнее — критерия фибровой текучести. При этом принято, что сжимающие напряжения от всех факторов суммируются в одной крайней точке сечения. Если один из факторов, вызывающих изгиб стержня, действует в противоположную сторону (по сравнению с показанным на рис. 6.1), нужно изменить знаки: для  $f_0$ , или  $e_0$ , или  $\sigma_q$ . В каждом таком случае необходимо уточнить, какая крайняя точка сечения имеет максимальное сжимающее напряжение и именно для этой точки брать момент сопротивления  $W_{сж}$ . Использованный здесь критерий фибровой текучести дает значение критической силы с определенным запасом, который зависит от формы поперечного сечения, гибкости, эксцентриситета и т. д. Для коротких сжатых стержней прямоугольного сечения занижение критической нагрузки может доходить до 30—40%. Однако имеется путь, который позволяет уточнить данное решение.

Для стержня с прямоугольным сечением предельное условие несущей способности

$$\sigma_{\max, \text{сж}} = \sigma_0 + \Delta\sigma_{\text{м}}/\sqrt{2} = R,$$

где  $\Delta\sigma_{\text{м}}$  — краевое сжимающее напряжение от изгиба стержня.

Смысл этого критерия состоит в том, что за счет развития пластических деформаций в поперечном сечении стержня его несущая способность может быть несколько выше той, которая определяется критерием точечной текучести. При этом в наиболее нагруженном сечении всегда сохраняется упругое ядро.

Рассмотренное решение приближенно. Оно обозримо, просто, учитывает комплекс факторов, влияющих на несущую способность стержня и дает весьма приемлемые результаты.

Фундаментальное значение в теории устойчивости имеет расчет центрально сжатого стержня.

Известно, что формула Эйлера для определения критического напряжения применима только к упругой стадии работы материала в диапазоне напряжений  $0 < \sigma \leq \sigma_{\pi}$  (где  $\sigma_{\pi}$  — предел пропорциональности материала). В диапазоне напряжений  $\sigma_{\pi} < \sigma < \sigma_{\text{T}}$  (упругопластическая стадия) можно пользоваться теорией касательного модуля  $E_{\text{к}}$  и вычислять критические напряжения

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E_{\text{к}}}{\lambda^2} \text{ при } E_{\text{к}} = E \frac{(\sigma_{\text{T}} - \sigma_{\text{кр}}) \sigma_{\text{кр}}}{(\sigma_{\text{T}} - \sigma_{\pi}) \sigma_{\pi}}. \quad (6.4)$$

После преобразований окончательно получим

$$\sigma_{\text{кр}} = \sigma_{\text{T}} - \frac{\sigma_{\pi} (\sigma_{\text{T}} - \sigma_{\pi})}{\pi^2 E} \lambda^2 \text{ при } \lambda^2 \leq \frac{\pi^2 E}{\sigma_{\pi}}.$$

Нормативные характеристики для сталей, используемых в мостостроении:

Марка стали . . . . .	16Д	15ХСНД	10ХСНД
$\sigma_{\pi}$ , МПа . . . . .	195	235	240
$\sigma_{\text{T}}$ , МПа . . . . .	230	350	400

Внецентренно сжатые стержни или стержни, имеющие начальные искривления, всегда теряют устойчивость при развитии в сечениях ограниченных пластических деформаций. Решение задачи соответственно значительно усложняется.

### 6.3. ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПЕРВОГО РОДА ДЛЯ БАЛОК

Устойчивость плоской формы изгиба 1-го в упругопластической стадии для стальных конструкций можно рассматривать на основе теории тонкостенных стержней В. З. Власова. Особенность решения данной задачи обуславливается тем, что до потери плоской формы равновесия в сечениях действуют напряжения, вызываемые только внешней нагрузкой. При потере устойчивости, вследствие кручения

образуют дополнительные нормальные и касательные напряжения, т. е. в рассматриваемом случае имеет место сложное напряжение. В теории малых упругопластических деформаций предполагается, что нагрузка возрастает пропорционально одному параметру (простое нагружение), а следовательно, к вопросам общей устойчивости эта теория не применима. Экспериментами для данного случая подтверждается теория пластического течения, которую здесь и применим. Заметим, что конечные результаты по обем указанным теориям для случая устойчивости плоской формы изгиба полосы, полученные Л. М. Качановым [19], практически одинаковы, но теория течения дает более простые формулы. В аналогичной постановке данный вопрос исследован Б. М. Броуде [11].

Рассматривая потерю устойчивости в условиях продолжающегося нагружения, для приращений напряжений будем иметь зависимости:

$$\delta\sigma_z = E_K \delta\varepsilon_z; \delta\tau_{xz} = G\delta\gamma_{xz}; \delta\tau_{yz} = G\delta\gamma_{yz},$$

где  $E_K$  — касательный модуль, соответствующий напряжению  $\sigma_z$ .

Таким образом, в зонах нагрузки приращения касательных напряжений и сдвига связаны законом Гука. Отсюда следует зависимость для момента чистого кручения:

$$\delta\bar{M}_{кр} = GJ_K \frac{d\theta}{dz},$$

где  $\theta$  — угол закручивания.

С учетом изложенного, дифференциальные уравнения устойчивости для тонкостенного стержня с одной осью симметрии примут вид (рис. 6.2):

$$\left. \begin{aligned} (EJ_y \xi'')'' + (M_x \theta)'' &= 0; \\ (E\bar{J}_\omega \theta'')'' - (GJ_K \theta')' - 2\beta_y (M_x \theta')' + q_y (e_y - a_y) \theta + M_x \xi'' &= 0 \end{aligned} \right\} (6.5)$$

$$\text{при } \beta_y = U_x / (2J_x) - a_y; U_x = \int y^2 dF + \int x^2 y dF;$$

$$J_x > J_y; \bar{J}_y = \frac{1}{E} \int E_K x^2 dF; \bar{J}_\omega = \frac{1}{E} \int E_K \omega^2 dF,$$

где  $a_y$  — расстояние от центра тяжести до центра изгиба (начало координат находится в центре тяжести).

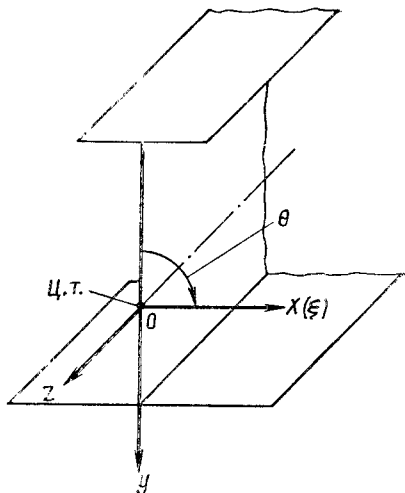


Рис. 6.2. Схема тонкостенного стержня (балки)

В случае, когда величины  $M_x$ ,  $\bar{J}_x$  и  $\bar{J}_\omega$  постоянны по длине, уравнения (6.5) совпадают с уравнениями В. З. Власова. Строго говоря, эти уравнения справедливы для балок (элементов), в которых линии, проходящие через центр тяжести и центр изгиба, прямые и параллельные. Однако их можно распространить и на другие случаи, подобно уравнениям для изгиба балок переменного сечения.

Для решения уравнений можно применить вариационный метод В. З. Власова [12], задавая искомые функции в виде  $\xi = A \varphi(z)$  и  $\theta = C \chi(z)$ , где  $A$  и  $C$  неизвестные коэффициенты. В результате получим (интегрирование от 0 до  $l$ );

$$AE \int \bar{J}_y(z) (\varphi'')^2 dz + C \int M_x \varphi'' \kappa dz = 0;$$

$$A \int M_x \varphi'' \kappa dz + C \left[ E \int \bar{J}_\omega(z) (\chi'')^2 dz + \int (2\beta_y M_x + GJ_k(z)) (\chi')^2 dz + \int q_y (e_y - a_y) \chi^2 dz \right] = 0.$$

Приравняв определитель, образованный из коэффициентов при  $A$  и  $C$ , равным нулю, получим значение критической нагрузки  $q_{yкр}$ .

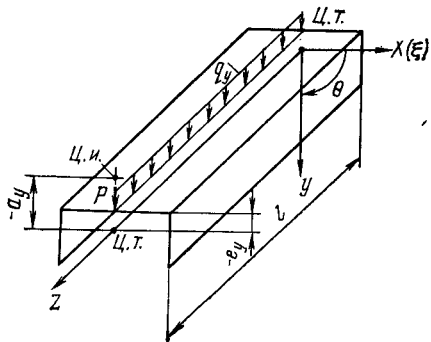
Отличие данного решения в упругопластической стадии от решения в упругой стадии — значения  $\bar{J}_y$  и  $\bar{J}_\omega$  меняются по длине и зависят от искомой величины  $q_{yкр}$ . Поэтому решение приходится искать методом последовательных приближений. Задавая исходное значение  $q_y^{(1)}$ , по нему определяем области развития пластических деформаций, а также величины  $M_x$ ,  $\bar{J}_y$  и  $\bar{J}_\omega$ . Раскрывая определитель, находим  $q_{yкр}^{(1)}$  и сравниваем его с  $q_y^{(1)}$ . Если они значительно различаются, для второго приближения исходным значением служит  $q_{yкр}^{(1)}$ . В качестве величины  $q_y^{(1)}$  в первом приближении может служить критическая нагрузка, найденная в предположении неограниченной упругости материала.

Учитывая большое значение расчетов в упругой стадии работы материала, рассмотрим балки с различными условиями опирания, полагая что критические напряжения не превышают предела пропорциональности. К типичным для мостовых конструкций случаям следует отнести такие сечения: 1) консольный стержень под действием сосредоточенной на конце силой  $P$  и распределенной нагрузкой  $q$ ; 2) шарнирно опертая на двух концах балка под действием поперечной распределенной нагрузки  $q$ ; 3) та же балка, но под действием опорных изгибающих моментов одинакового значения. Для случаев 2 и 3 имеются решения, данные В. З. Власовым [12].

Чтобы получить решение для консольного стержня (рис. 6.3), зададим вид функции перемещений ( $J_x > J_y$ ): 1) прогиба в горизонтальной плоскости  $\xi = A \varphi(z) = A (1 - \cos \frac{\pi z}{2l})$ ; 2) угла закручивания  $\theta = C \chi(z) = C \sin \frac{\pi z}{2l}$ .

Полагая сечение балки постоянным по всей длине из уравнений (6.5), приравняв нулю определитель, образованный из коэффициен-

Рис. 6.3. Схема консольного стержня для расчета на изгибно-крутильную устойчивость



тов при  $A$  и  $C$ , получим следующее квадратное уравнение для  $q_{кр}$ :

$$q_{кр}^2 + \frac{q_{кр}}{\kappa} \cdot \frac{3\pi^5 EJ_y}{16l^4} \times$$

$$\times \left( \beta_y - \frac{1}{4} e_y + \frac{1}{4} a_y \right) -$$

$$- \frac{EJ_y}{\kappa^2} \cdot \frac{9\pi^8}{4096l^8} (4l^2 GJ_K + \pi^2 EJ_\omega) = 0.$$

Решение этого уравнения дает два значения критической нагрузки, направленных вниз и вверх:

$$q_{кр} = \frac{3\pi^5}{32l^4 \kappa} \left( -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \frac{EJ_y}{4\pi^2} (4l^2 GJ_K + \pi^2 EJ_\omega)} \right) \quad (6.6)$$

$$\text{при } \alpha = EJ_y \left( \beta_y - \frac{1}{4} e_y + \frac{1}{4} a_y \right); \quad \beta_y = \frac{U_x}{2J_x} - a_y;$$

$$U_x = \int y^2 dF + \int x^2 y dF; \quad \kappa = \frac{2(\pi-2)}{\pi} + \frac{P}{q} \cdot \frac{2}{l}.$$

Нагрузки  $q$  и  $P$  приложены по высоте с одинаковым эксцентриситетом.

Для оценки точности полученных решений сравним его с результатом по консольной сплошной полосе пролетом  $l$ , загруженной равномерно распределенной нагрузкой. Полагая  $P = 0$  и  $\alpha = J_\omega = 0$ , получим  $q_{кр} = 12,6 \frac{\sqrt{EJ_y GJ_K}}{l^8}$ .

Точное значение [12] первой критической нагрузки  $q'_{кр} = 12,85 \frac{\sqrt{EJ_y GJ_K}}{l^8}$ , т. е. погрешность решения составляет менее 2%.

В случае переменного сечения балки нужно этот факт учитывать, т. е. моменты инерции внести под знак интеграла.

#### 6.4. ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ВТОРОГО РОДА ДЛЯ БАЛОК И СТЕРЖНЕЙ

Общая устойчивость балок в условиях начальных несовершенств или наличия внешних возмущающих сил рассматривается как устойчивость 2-го рода, т. е. устойчивость деформирования. Представляется целесообразным предварительно дать формулы для оценки деформированного и напряженного состояния таких балок. Балки, находящиеся в смонтированной готовой конструкции, могут иметь различного характера начальные искривления. На общую устойчивость существенное влияние оказывают начальный горизонталь-

ный прогиб и начальные углы поворота (закручивания) сечений вокруг продольной оси балки. Эти искривления вызваны рядом факторов, связанных с процессами изготовления, транспортировки и монтажа пролетных строений.

Будем считать, что в свободно опертой по двум концам балке начальные искривления по ее длине меняются по закону синуса: начальные горизонтальные прогибы —  $\xi_0 \sin(\pi z/l)$ ; начальные углы поворота вокруг продольной оси —  $\theta_0 \sin(\pi z/l)$ . Решение системы дифференциальных уравнений (6.5) будет

$$\xi = (\xi_0 + \xi_1) \sin \frac{\pi z}{l}; \quad \theta = (\theta_0 + \theta_1) \sin \frac{\pi z}{l}, \quad (6.7)$$

где  $\xi$ ,  $\theta$  соответственно полиые горизонтальные прогибы и углы закручивания сечений;  $\xi_1$ ,  $\theta_1$  — соответственно упругие горизонтальные прогибы и углы закручивания сечений.

После подстановки выражения (6.7) в уравнение (6.5) и добавления членов от внешней нагрузки получим систему алгебраических уравнений относительно неизвестных параметров  $\xi_1$  и  $\theta_1$ :

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \frac{\pi^4}{l^4} \xi_1 - M (\theta_0 + \theta_1) \frac{\pi^2}{l^2} &= q_x; \\ EJ_\omega \frac{\pi^4}{l^4} \theta_1 + GJ_k \frac{\pi^2}{l^2} \theta_1 + 2\beta_y M (\theta_0 + \theta_1) \frac{\pi^2}{l^2} - M \frac{\pi^2}{l^2} (\xi_0 + \xi_1) &= -m. \end{aligned} \right\} (6.8)$$

Уравнения (6.8) относятся к шарнирно опертой балке, нагруженной опорными моментами  $M$  в вертикальной плоскости и распределенными нагрузками — поперечной в горизонтальной плоскости  $q_x \sin(\pi z/l)$  и моментной (крутящей)  $m \sin(\pi z/l)$ . Из первого уравнения системы можно найти коэффициент, характеризующий упругий прогиб в горизонтальной плоскости:

$$\xi_1 = \frac{q_x l^4}{\pi^4 EJ_y} + M (\theta_0 + \theta_1) \frac{l^2}{\pi^2 EJ_y}.$$

Тогда второе уравнение получит вид:

$$\theta_1 \left( EJ_\omega \frac{\pi^4}{l^4} + GJ_k \frac{\pi^2}{l^2} + 2\beta_y M \frac{\pi^2}{l^2} - M^2 \frac{1}{EJ_y} \right) + M \left( 2\beta_y \frac{\pi^2}{l^2} \theta_0 - \frac{\pi^2}{l^2} \xi_0 - \frac{q_x l^2}{EJ_y \pi^2} - \frac{M}{EJ_y} \theta_0 + \frac{m}{M} \right) = 0. \quad (6.9)$$

Это уравнение легко разрешается относительно  $\theta_1$ , но нужно иметь в виду, что направления начальных искривлений  $\xi_0$  и  $\theta_0$ , а также распределенных нагрузок  $q_x$  и  $m$  необходимо принимать в соответствии с принятым правилом знаков.

Таким образом получено деформированное состояние балки с начальными искривлениями, которое определяется формулами (6.7). В рассматриваемой задаче вертикальные прогибы не влияют на потерю устойчивости (в рамках принятых предпосылок) и могут быть найдены по известным формулам. Напряженное состояние сечений

определился то же по известным формулам, в которые нужно подставить упругие составляющие перемещений, т. е.  $\xi_1$  и  $\theta_1$ ,

Рассмотрим частные случаи поперечных сечений стержня.

Возьмем с п л о ш н о е с и м м е т р и ч н о е сечение ( $EJ_\omega = 0$ ), в котором все действующие нагрузки отнесены к геометрической оси балки. Система разрешающих уравнений:

$$\left. \begin{aligned} EJ_y \frac{\pi^4}{l^4} \xi_1 - M(\theta_0 + \theta_1) \frac{\pi^2}{l^2} &= q_x; \\ GJ_K \frac{\pi^2}{l^2} \theta_1 - M_*(\xi_0 + \xi_1) \frac{\pi^2}{l^2} &= -m. \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

Отсюда упругие перемещения

$$\theta_1 = \frac{A}{GJ_K (\pi^2/l^2) (1 - M^2/M_{кр}^2)}; \quad \xi_1 = \frac{q_x l^4}{EJ_y \pi^4} + M \frac{l^2}{\pi^2 EJ_y} (\theta_0 + \theta_1)$$

$$\text{при } A = M \left( \frac{\pi^2}{l^2} \xi_0 + \frac{q_x l^2}{EJ_y \pi^2} + \frac{M\theta_0}{EJ_y} - \frac{m}{M} \right); \quad M_{кр} = \frac{\pi}{l} (EJ_y GJ_K)^{1/2}.$$

Выражение для  $M_{кр}$  отражает случай идеально прямой балки при отсутствии нагрузок  $q_x$  и  $m$ , т. е.  $M_{кр}$  — критическое значение изгибающего внешнего момента, соответствующее потере устойчивости первого рода (бифуркация форм равновесия). При приближении величины  $M$  к  $M_{кр}$  перемещения балки, имеющей начальные искривления или возмущающие нагрузки, стремятся по значению к бесконечности. Здесь можно провести аналогию со сжатым стержнем, имеющем начальную кривизну. В данном случае сложного сопротивления балки ее напряженное состояние определяется прогибами в вертикальной плоскости (обычный расчет), а также прогибами в горизонтальной плоскости и углами закручивания (деформационный расчет). Для сплошного сечения от изгиба в двух плоскостях возникают нормальные напряжения, а от кручения касательные. По длине балки их максимальные значения в общем случае не совпадают.

Для двутаврового тонкостенного симметричного сечения с исчезающе малой жесткостью чистого кручения ( $GJ_K = 0$ ) система разрешающих уравнений относительно неизвестных перемещений  $\xi_1$  и  $\theta_1$  имеет вид:

$$EJ_y \frac{\pi^4}{l^4} \xi_1 - M(\theta_0 + \theta_1) \frac{\pi^2}{l^2} = q_x; \quad EJ_\omega \frac{\pi^4}{l^4} \theta_1 - M \frac{\pi^2}{l^2} (\xi_0 + \xi_1) = -m. \quad (6.11)$$

Отсюда упругие перемещения:

$$\theta_1 = \frac{A}{EJ_\omega (\pi^4/l^4) (1 - M^2/\bar{M}_{кр}^2)}; \quad \xi_1 = \frac{q_x l^4}{EJ_y \pi^4} + M \frac{l^2}{\pi^2 EJ_y} (\theta_0 + \theta_1).$$

Здесь в отличие от случая сплошного сечения критический момент:

$$\bar{M}_{кр} = \frac{\pi^2}{l^2} (EJ_\omega EJ_y)^{1/2}.$$

При приближении внешнего момента  $M$  к значению  $\bar{M}_{кр}$  перемещения стремятся к бесконечно большим значениям. Нормальные напряжения будут максимальными в сечении в середине пролета и их составляющие равны: от изгиба в вертикальной плоскости  $\sigma_B = M/W_x$ ; то же, в горизонтальной  $\sigma_T = M_T/W_y$ ; от стесненного кручения  $\sigma_\omega = \omega B/J_\omega$ .

Бимомент в общем случае  $B(z) = -EJ_\omega \theta_1''(z)$ , для настоящего примера

$$B_{\max} = \left( M \frac{\pi^2}{l^2} \xi_0 + \frac{M^2}{EJ_y} \theta_0 \right) \left[ \frac{\pi^2}{l^2} \left( 1 - \frac{M^2}{\bar{M}_{кр}^2} \right) \right]^{-1}.$$

Для симметричного двутавра секториальные характеристики:

$$J_\omega = J_1 h^2/2; \quad \omega = hb/4,$$

где  $J_1$  — момент инерции одной полки относительно вертикальной оси;  $h$  — высота двутавра;  $b$  — ширина полки.

Изгибающий момент в горизонтальной плоскости находят по известным дифференциальным зависимостям; его максимальное значение

$$M_{T \max} = M \left[ \theta_0 + \frac{M \frac{\pi^2}{l^2} \xi_0 + \frac{M^2}{EJ_y} \theta_0}{EJ_\omega \frac{\pi^4}{l^4} \left( 1 - \frac{M^2}{\bar{M}_{кр}^2} \right)} \right].$$

Касательные напряжения в данном примере зависят только от изгибно-крутящего момента (момент чистого кручения равен нулю):

$$\tau_\omega = -\bar{M}_K(z) S_\omega / (J_\omega \delta) \quad \text{при} \quad \bar{M}_K(z) = -EJ_\omega \theta_1''(z) \quad \text{и} \quad S_\omega = \int \omega dF,$$

где  $S_\omega$  — секториальный статический момент;  $\delta$  — толщина элемента сечения.

Для симметричного двутавра максимальное значение секториального статического момента имеет место для точки пересечения полки со стенкой:

$$S_{\omega, \max} = b^2 h \delta_{II} / 16,$$

где  $\delta_{II}$  — толщина полки.

Рассмотрим некоторые частные виды начальных искривлений двутавровой балки. Пусть начальное искривление балки имеет место только в горизонтальной плоскости; стрелка прогиба  $f$  в середине пролета, а закон изменения искривления по длине балки описывается параболой второй степени. Для этого случая А. Р. Ржаницыным [54] получены формулы дополнительных нормальных напряжений, возникших в сечениях балки.



При сосредоточенной силе, приложенной в середине пролета, максимальное дополнительное напряжение

$$\sigma_{\text{д}} = 5 \frac{M_{\text{max}} f}{l^2} \cdot \frac{bh}{J_{\text{к}}} \left[ 1 - \frac{\text{th}(\kappa l/2)}{\kappa l/2} \right] \quad (6.12)$$

$$\text{при } M_{\text{max}} = \frac{Pl}{4}, \quad \kappa = [GJ_{\text{к}}/(EJ_{\omega})]^{1/2}.$$

Если на балку действует равномерно распределенная нагрузка, то

$$\sigma_{\text{д}} = 5 \frac{M_{\text{max}} f}{l^2} \cdot \frac{bh}{J_{\text{к}}} \left[ 1 - \frac{\text{th}(\kappa l/2)}{\kappa l/2} - \frac{\text{th}(\kappa l/4)}{\kappa l/4} \right] \text{ при } M_{\text{max}} = \frac{ql^2}{8}. \quad (6.13)$$

Особенно простая формула для дополнительного напряжения в двутавровой балке, имеющей начальную погибь в горизонтальной плоскости, получается в случае синусоидальной нагрузки с амплитудным коэффициентом  $q_0$ :

$$\sigma_{\text{д}} = 5 \frac{M_{\text{max}} f}{l^2} \cdot \frac{bh}{J_{\text{к}}} \left( 1 + \frac{\pi^2}{\kappa^2 l^2} \right)^{-1} \text{ при } M_{\text{max}} = \frac{q_0 l^2}{\pi^2}. \quad (6.14)$$

Может быть поставлена и обратная задача: по заданному дополнительному напряжению  $\sigma_{\text{д}}$  определить допустимое значение стрелки  $f$  искривления балки в горизонтальной плоскости. Это легко делается по приведенным формулам.

Практический интерес представляет напряженное состояние двутавровой балки, имеющей только начальное закручивание сечений. При этом дополнительное напряжение

$$\sigma_{\text{д}} = M (1/W_x + \theta_0/W_y),$$

где  $M$ ,  $\theta_0$  — соответственно изгибающий момент в сечении и начальное закручивание сечения.

Перейдем теперь к сжатым стержням. Рассмотрим тонкостенный стержень внецентренно сжатый с двусым эксцентриситетом. Иногда это явление трактуется как потеря устойчивости 1-го рода [12]. В действительности же здесь имеет место потеря устойчивости 2-го рода — постепенное нарастание деформаций, в том числе угла закручивания, с самого начала приложения нагрузки. Практическое решение возможно с использованием критерия «устойчивой прочности» или другого приближенного критерия при упругом решении задачи.

Для стержня постоянного сечения с одной осью симметрии система неоднородных дифференциальных уравнений (приближенное решение):

$$\left. \begin{aligned} EJ_y u'' + N(u - e_x) - N(v + a_y - e_y) \Phi &= 0; \\ EJ_x v + N(v - e_y) + N(u - e_x) \Phi &= 0; \\ EJ_{\omega} \Phi^{IV} + \{ \Phi' [N r^2 - GJ_{\text{к}} - 2N(v - e_y) \beta_y] \}' - N[(v + a_y - e_y)u' - \\ - (u - e_x)v'] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.15)$$

Для упрощения уравнений возможна замена с использованием следующих выражений:

$$v - e_y \approx -e_y (1 - N/N_{x_{кр}})^{-1}; \quad u - e_x \approx -e_x (1 - N/N_{y_{гпр}})^{-1}.$$

Иногда пренебрегают нелинейными членами  $u\Phi$ ,  $v\Phi$ ,  $vu'$ ,  $uv'$  и также решают задачу устойчивости 2-го рода.

Внецентренное сжатие в плоскости наибольшей жесткости, которая служит одновременно осью симметрии, сводится к задаче устойчивости 1-го рода для изгибно-крутильной формы. При этом всегда  $r_e \leq r_y$ , где  $r_e$  — условный радиус инерции для изгибно-крутильной формы, а  $r_y$  — радиус инерции при потере устойчивости в плоскости наименьшей жесткости. Если сжимающая сила приложена в центре изгиба поперечного сечения, изгибно-крутильная форма потери устойчивости отсутствует (разделение на изгибные и крутильные формы). Таким образом, центрально-сжатый стержень с одной осью симметрии, т.е. когда сжимающая сила приложена в центре тяжести, нужно проверять на изгибно-крутильную устойчивость. Для центрально-сжатого стержня с двумя осями симметрии есть три независимых радиуса инерции — два для изгибных форм потери устойчивости, один для крутильной.

## 6.5. НОРМАТИВНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

При практических расчетах изгибно-крутильной устойчивости можно воспользоваться коэффициентами понижения несущей способности, полученными для сжатых стержней. Поскольку в нормативных расчетах учитывают начальные искривления, а также сварочные напряжения, косвенно эти факторы будут учтены и в расчете изгибно-крутильной устойчивости. Значения гибкости получают из равенства критических напряжений, например, по максимальному сжимающему напряжению в центрально-сжатом стержне и изгибаемой балке.

В упругой стадии критическое напряжение:

$$\text{в центрально-сжатом стержне } \sigma_{крст} = \pi^2 E / \lambda^2;$$

$$\text{в изгибаемой балке } \sigma_{крб} = M_{крб} / W_c,$$

где  $M_{крб}$  — критический изгибающий момент;  $W_c$  — момент сопротивления сжатого волокна.

Из условия  $\sigma_{крст} = \sigma_{крб}$  получим гибкость балки:

$$\lambda_b = l / r_b = \pi \sqrt{E W_c / M_{крб}}. \quad (6.16)$$

В дальнейшем будем пользоваться радиусом инерции  $r_b$  балки, вычисляемым из формулы (6.16), что более удобно в практических расчетах; свободную длину  $l$  можно назначать с учетом особенностей условий опирания балки.

Такой подход не вызывает особых возражений, пока критические напряжения не превосходят предел пропорциональности. Дело в том, что в изгибаемой балке возможно увеличение изгибающего мо-

сечения за счет развития пластических деформаций по высоте и длине балки. Поэтому в области малых гибкостей коэффициент продольного изгиба для сжатого стержня должен быть увеличен, чтобы его можно было использовать для расчета устойчивости балки. Рекомендуется следующая приближенная формула для повышения коэффициента

$$\kappa = 1 + (C_{ш} - 1)(1 - \lambda/85) \text{ при } \lambda \leq 85. \quad (6.17)$$

Здесь коэффициент  $C_{ш}$  представляет собой отношение предельного момента, соответствующего образованию пластического шарнира в сечении, к моменту, вызывающему текучесть в одной точке (предельный упругий момент). При наличии начальных искривлений в балке образование пластического шарнира исключается даже при гибкости равной нулю. Коэффициент  $C_{ш}$  нужно заменять на коэффициент  $c$ , которым пользуются в расчетах сечений на прочность (см. п. 4.2).

Рассмотрим некоторые характерные случаи расчета балок и стержней на изгибно-крутильную устойчивость.

При изгибе балок изгибно-крутильную устойчивость стальных балок проверяют по выражению

$$M / (\varphi_b W_c) \leq R, \quad (6.18)$$

где  $M$  — наибольший расчетный изгибающий момент в пределах принимаемой в расчете свободной длины  $l$  сжатого пояса балки;  $\varphi_b$  — коэффициент продольного изгиба, определяемый в зависимости от условной гибкости  $\lambda_b = l/r_b$  из плоскости балки, как для центрально-сжатого стержня при относительном эксцентриситете  $i_1 = 0$ ;  $W_c$  — момент сопротивления сечения балки для крайней фибры сжатого пояса;  $R$  — основное расчетное сопротивление.

Если на балку наряду с вертикальной действует и горизонтальная поперечная нагрузка, коэффициент  $\varphi_b$  нужно принимать при

$$i_1 = \sigma_T / \sigma_B,$$

где  $\sigma_T$  — наибольшее в сечении в пределах средней трети свободной длины (а для консоли — в заделке) напряжение на кромке сжатого пояса от изгиба горизонтальной нагрузкой;  $\sigma_B$  — напряжение от центра тяжести сжатого пояса от вертикальной нагрузки, определяемое по наибольшему изгибающему моменту в том же сечении.

Радиус инерции  $r_b$  необходимо определять в зависимости от типа балок, условий их опирания и вида нагрузки в соответствии со следующими указаниями.

1. При чистом изгибе балки начало осей координат нужно принимать в центре тяжести сечения, когда ось  $x$  направлена вправо, ось  $y$  — вниз и служит осью симметрии сечения; положительная нагрузка вызывает прогиб по направлению оси  $y$ . Радиус инерции:

$$r_b = \left[ \frac{1}{W_c} \left| J_y c_y \pm \left[ J_y \left( J_y c_y^2 + J_{\omega} + \frac{l}{\pi^2} \frac{G}{E} J_{\kappa} \right) \right]^{1/2} \right| \right]^{1/2} \quad (6.19)$$

$$\text{при } c_y = \left( \int y^3 dF + \int x^2 y dF \right) / (2J_x) - a_y,$$

где  $J_y, J_x, J_\omega$  — моменты инерции при изгибе относительно оси  $y$ , чистом кручении, бимомент инерции сечения;  $a_y$  — расстояние от центра тяжести до центра изгиба сечения с соответствующим знаком по направлению оси  $y$   $a_y > 0$ , в обратном направлении  $a_y < 0$ ;  $J_x$  — момент инерции сечения относительно оси  $x$ .

Первое значение  $r_6$  соответствует нагрузке, направленной вниз, а второе — направленной вверх; при этом меньшее значение соответствует случаю сжатия более слабого пояса балки. Для каждого случая необходимо принимать свой момент сопротивления сжатого пояса.

2. В случае изгиба жестко защемленной консоли пролетного строения (балки) радиус инерции

$$r_6 = \left[ \frac{2,91}{W_c l_0 \kappa} \left( \beta + \frac{l_0}{2} \right) \left| -\alpha \pm \left[ \alpha^2 + \frac{J_y}{4} \left( \frac{4I_0^3}{\pi^2} \frac{G}{E} J_{K+J_\omega} \right)^{1/2} \right] \right| \right]^{1/2} \quad (6.20)$$

при  $\beta = P/q$ ,  $\kappa = 0,73 + 2\beta/l_0$ ,  $\alpha = J_y (c_y - 0,25e_y + 0,25a_y)$ ,

где  $\beta$  — параметр сосредоточенной нагрузки  $P$ , приложенной на конце консоли с эксцентриситетом по высоте  $e_y$ ;  $q$  — интенсивность равномерно распределенной по всей длине консоли  $l_0$  нагрузки, приложенной, как и  $P$ , с эксцентриситетом по высоте  $e_y$ ;  $e_y$  — расстояние от центра тяжести сечения до точки приложения сил по высоте (с соответствующим знаком);

Остальные обозначения прежние.

3. Для изгиба шарнирно опертого пролетного строения (балки), нагрузкой  $q$ :

$$r_6 = \left[ \frac{J_y}{79W_c c_1} \left| 23,5b_1 - 41b_2 \pm \left[ (23,5b_1 - 41b_2)^2 + (8000a + 810l^2) c_1 \right]^{1/2} \right| \right]^{1/2} \quad (6.21)$$

при  $a = (EJ_\omega)/(GJ_K)$ ,  $b_1 = 2c_y c_1$ ,

$b_2 = (e_y - a_y) c_1$ ,  $c_1 = (EJ_y)/(GJ_K)$ ,

где  $l$  — пролет балки

В случае в центре сжатия шарнирно опертого по концам стержня при изгибе в плоскости наибольшей жесткости ( $J_x > J_y$ ), совпадающей с плоскостью симметрии, устойчивость проверяют по выражению

$$|N/F| + |(Ne)/W_c| \leq \varphi_c R, \quad (6.22)$$

где  $e$  — расчетный эксцентриситет (положительный по направлению оси  $y$ );  $\varphi_c$  — коэффициент продольного изгиба, определяемый как для центрально сжатого стержня ( $i = 0$ ) в зависимости от гибкости  $\lambda_0 = l/r_c$ .

Радиус инерции

$$r_c = \left[ \frac{1 + \left| \frac{e}{W_c} \right| F}{2 \left[ \alpha - \kappa_1 F (a_y - e)^2 / J_p \right]} \left| \alpha r_y^2 + r_\omega^2 \pm \left[ (\alpha r_y^2 + r_\omega^2)^2 - \right. \right. \right. \quad (6.23)$$

$$\left. \left. \left. - 4r_y^2 r_\omega^2 \left( \alpha - \frac{F (a_y - e)^2}{J_p} \right)^2 \right]^{1/2} \right| \right]^{1/2}.$$

$$\text{при } \alpha = 1 + e \frac{2\hat{F}c_y}{J_p}, \quad r_\omega = \left[ \kappa_2 \frac{J_\omega}{J_p} + \frac{G}{E} \frac{l^2}{\pi^2} \cdot \frac{J_K}{J_p} \right]^{1/2};$$

$$J_p = J_x + J_y + a_y^2 F,$$

где  $r_y$  — радиус инерции относительно оси  $y$ ;  $F$  — площадь поперечного сечения;  $J_p$  — полярный момент инерции сечения относительно центра изгиба;  $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$  — для случая свободной деформации по концам стержня;  $\kappa_1 = 0,72$ ,  $\kappa_2 = 4$  — для случая полного стеснения деформации по концам стержня. Остальные обозначения прежние.

Для сечения с двумя осями симметрии

$$a_y = c_y = 0.$$

При центрально-сжатом шарнирно опертом по концам стержне, имеющем открытое сечение с одной осью симметрии  $y$  ( $J_x > J_y$ ), также должна быть проверена изгибно-крутильная устойчивость по выражению

$$N/F_{\text{вр}} \leq \varphi'_c R. \quad (6.24)$$

Здесь  $\varphi'_c$  определяется так же, как и  $\varphi_c$ , а радиус инерции  $r'_c$  — по вышеприведенной формуле для  $r_c$  при  $e = 0$ .

Рассматривая общий случай внецентренного сжатия шарнирно опертого по концам стержня, нужно иметь в виду, что если продольная сжимающая сила приложена с расчетными эксцентриситетами  $e_y$  и  $e_x$  по направлению осей  $y$  и  $x$ , устойчивость стержня проверяется по формуле

$$\left| \frac{N}{F} \right| + \left| \frac{N e_y}{J_x} y_{\text{сж}} \right| + \left| \frac{N e_x}{J_y} x_{\text{сж}} \right| \leq \varphi_R R,$$

где  $y_{\text{сж}}$ ,  $x_{\text{сж}}$  — координаты точки сечения с максимальным сжимающим напряжением;  $\varphi_R$  — коэффициент продольного изгиба, определяемый как для центрально-сжатого стержня в зависимости от гибкости  $\lambda_K = l/r_K$ .

В общем случае внецентренного сжатия радиус инерции

$$r_K = \frac{l}{\pi} \left[ \frac{N_{\text{кр. min}}}{EF} \left( 1 + \left| \frac{e_y F}{J_x} y_{\text{сж}} \right| + \left| \frac{e_x F}{J_y} x_{\text{сж}} \right| \right) \right]^{1/2}.$$

Здесь значение  $N_{\text{кр. min}}$  является первым (наименьшим) корнем кубического уравнения вида:

$$(N_x - N)(N_y - N) [r^2 (N_\omega - N) - 2c_x e_x N - 2c_y e_y N] - \kappa_1 (a_y - e_y)^2 (N_x - N) N^2 - \kappa_2 (a_x - e_x)^2 (N_y - N) N^2 = 0$$

при  $N_x = EJ_x \pi^2 / l^2$ ,  $N_y = EJ_y \pi^2 / l^2$ ,  $N_\omega = (\kappa_2 EJ_\omega \pi^2 / l^2 + GJ_K) / r^2$ ,  $r^2 =$

$$= (J_x + J_y) / F + a_x^2 + a_y^2, \quad c_x = \left( \int x^3 dF + \int y^2 x dF \right) / (2J_y) - a_x,$$

$$c_y = \left( \int y^3 dF + \int x^2 y dF \right) / (2J_x) - a_y,$$

где  $a_y$ ,  $a_x$  — координаты центра изгиба сечения по направлению осей  $y$  и  $x$ .

В случае свободной деформации по концам стержня  $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$ , а полного стеснения деформации по концам стержня  $\kappa_1 = 0,72$ ,  $\kappa_2 = 4,0$ . Для сечения с двумя осями симметрии ( $a_x = a_y = 0$ ) величины  $c_x$  и  $c_y$  равны 0.

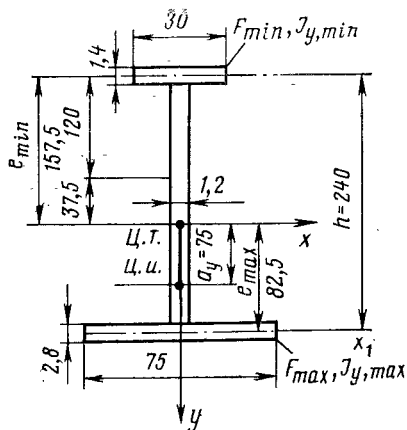


Рис. 6.4. Поперечное сечение балки к примеру расчета (размеры в сантиметрах)

Рассмотрим пример расчета на общую устойчивость участка длиной 525 см двутавровой стальной балки, расположенного между поперечными связями со следующими характеристиками поперечного сечения (рис. 6.4):

сжатый верхний пояс:  $F_{\min} = 30 \cdot 1,4 = 42 \text{ см}^2$ ;  $J_{y, \min} = 1,4 \cdot 30^3 : 12 = 10^3 \cdot 3,15 \text{ см}^4$ ;

растянутый нижний пояс:  $F_{\max} + 75 \cdot 2,8 = 210 \text{ см}^2$ ;  $J_{y, \max} = 2,8 \cdot 75^3 : 12 = 10^3 \cdot 98,5 \text{ см}^4$ ;

положение центра тяжести (Ц.т.) относительно нижней полки

$$y_{x1} = \frac{42 \cdot 240 + 240 \cdot 1,2 \cdot 120}{42 + 240 \cdot 1,2 + 210} = 82,5 \text{ см};$$

положение центра изгиба (Ц.и.) от центра тяжести в сторону нижней полки при  $J_{y, \max} \geq J_{y, \min}$

$$a_y = \frac{e_{\max} J_{y, \max} - e_{\min} J_{y, \min}}{J_{y, \max} + J_{y, \min}} = \frac{82,5 \cdot 98,5 - 157,5 \cdot 3,15}{98,5 + 3,15} = 75 \text{ см};$$

моменты инерции относительно осей  $x$  и  $y$   $J_x = 42 \cdot 157,5^2 + 210 \cdot 82,5^2 + 1,2 \cdot 240^3 : 12 + 1,2 \cdot 240 \cdot 37,5^2 = 425 \cdot 10^4 \text{ см}^4$ ,  $J_y = J_{y, \max} + J_{y, \min} = 101,6 \times 10^3 \text{ см}^4$ ;

момент сопротивления сжатого пояса  $W_c = 425 \cdot 10^4 : 157,5 = 270 \cdot 10^2 \text{ см}^3$ ;  
 бимомент инерции сечения

$$J_{\omega} = \frac{h^2 J_{y, \max} J_{y, \min}}{J_y} = \frac{240^2 \cdot 98,5 \cdot 3,15 \cdot 10^3}{101,6} = 17,6 \cdot 10^7 \text{ см}^6.$$

Характеристика  $c_y$  вычисляется по элементам с учетом направления осей координат:

верхняя полка

$$\int x^2 y dF = J_{y, \min} (-e_{\min}) = 10^3 \cdot 3,15 (-157,5) = -10^5 \cdot 4,97 \text{ см}^5, \int y^3 dF = F_{\min} (-e_{\min})^3 = 42 (-157,5)^3 = -10^5 \cdot 1,640 \text{ см}^6;$$

$$\text{нижняя полка: } \int x^2 y dF = J_{y, \max} e_{\max} = 10^3 \cdot 98,5 \cdot 82,5 = 10^5 \cdot 81,3 \text{ см}^5 \\ \int y^3 dF = F_{\max} e_{\max}^3 = 210 \cdot 82,5^3 = 10^5 \cdot 11,80 \text{ см}^6;$$

Интегралы, входящие в выражения для  $c_x$  и  $c_y$ , допускается вычислять следующим образом:

для полки, расположенной параллельно горизонтальной оси  $x$  и симметричной относительно оси  $y$ , имеющей ширину  $b$ , толщину  $\delta$  и расположенной на расстоянии  $y_0$  от центра координат  $\int x^2 y dF = \frac{\delta b^3}{12} y_0$ ,  $\int y^3 dF = b \delta y_0^3$  (при этом нужно учитывать знак  $y_0$ );

для участка стенки, расположенного по оси  $y$ , от начала координат до точки с ординатой  $\pm y$ :

$$\int x^2 y dF = 0; \int y^3 dF = \pm 0,25 \delta y^4,$$

где  $\delta$  — толщина стенки.

стенка  $\int x^2 y dF = 0$ ;  $\int y^3 dF$  для части стенки выше центра тяжести  $0,25 \delta y_i^3 = 0,25 \cdot 1,2 \cdot 157,5^3 = -10^5 \cdot 1850 \text{ см}^5$ ; то же, для части стенки ниже центра тяжести  $0,25 \delta y_i^3 = 0,25 \cdot 1,2 \cdot 82,5^3 = 10^5 \cdot 140 \text{ см}^5$ ; значения интегралов для всего сечения  $\int y^3 dF + \int x^2 dF = 10^5 (-4,97 - 1640 + 81,3 + 1180 - 1850 + 140) = -10^5 \cdot 2094 \text{ см}^5$ ; значение  $c_y = \frac{-10^5 \cdot 2094}{2 \cdot 10^4 \cdot 425} = -75 = -99,6 \text{ см}$ ; момент инерции при чистом кручении  $J_k = \frac{1}{3} \sum \delta_i^3 b_i = \frac{1}{3} (30 \cdot 1,4^3 + 240 \cdot 1,2^3 + 75 \cdot 2,8^3) = 715 \text{ см}^4$ .

Радиус инерции по формуле (6.19)

$$r_{01} = \left\{ \frac{1}{10^2 \cdot 270} \left| -10^3 \cdot 101,6 \cdot 99,6 + \left[ 10^3 \cdot 101,6 \left( 10^3 \cdot 101,6 \cdot 99,6^2 + 10^7 \cdot 17,6 + \frac{525^2}{9,87} \cdot \frac{0,84}{2,1} \cdot 715 \right) \right]^{1/2} \right| \right\}^{1/2} = 5,8 \text{ см.}$$

Гибкость для случая сжатия более слабого (верхнего) пояса  $\lambda = 525 : 5,8 = 90$ . Для стали 15ХСНД при сварной конструкции  $\varphi = 0,43$ . Предельно допустимое сжимающее напряжение в поясе балке равно  $\sigma_c = 0,43 \cdot 270 = 116,1 \text{ МПа}$ .

## 6.6. ПЛАСТИНЧАТЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

В стальных пролетных строениях мостов пластинчатые элементы часто имеют такие размеры (отношение ширины  $b$  к толщине  $\delta$ ), что критические напряжения при сжатии превосходят предел пропорциональности.

Возьмем для примера два типа стальных пластин (рис. 6.5): свободные свесы полок или продольные ребра (тип I) и участки стенок или лист между продольными ребрами (тип 2), находящиеся под действием равномерно распределенных сжимающих в продольном направлении напряжений. В этих случаях критические напряжения в упругой стадии (в мегапаскалях):

$$\sigma_{кр1}^* = 10^5 \cdot 0,783 (\delta/b)^2; \quad \sigma_{кр2}^* = 10^5 \cdot 7,37 (\delta/b)^2. \quad (6.25)$$

Определим предельные значения  $b/\delta$ , при которых потеря устойчивости происходит еще в упругой стадии. Пусть пластины изготовлены из стали марки 16Д, для которой предел пропорциональности (нормативный)  $\sigma_{\pi} = 195 \text{ МПа}$ . Тогда из условия  $\sigma_{кр} \leq \sigma_{\pi}$  получим:  $(b/\delta)_1^* \geq 20$ ;  $(b/\delta)_2^* \geq 61,5$ . Оценим погрешность, которая возникает, если для определения размеров сжатых пластин пользоваться упругим расчетом. Пусть  $\sigma_{кр}^* = 230 \text{ МПа}$ . Пользуясь формулами (6.25), получим:  $(b/\delta)_1^* = 18,5$ ;  $(b/\delta)_2^* = 56,5$ .

Как будет показано ниже, учет работы в упругопластической стадии дает:  $b/(\delta)_1 = 14$ ;  $b/(\delta)_2 = 44$ .

Для типа I пластины относительная толщина занижена на 32%, а для типа 2 — на 28,4%.

Таким образом, встречающийся иногда подход к расчету сжатых пластин только по упругой

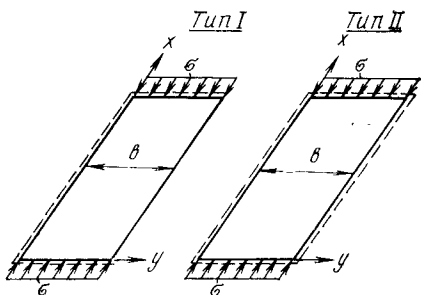


Рис. 6.5. Пластины, сжатые в продольном направлении

стадии идет не в запас несущей способности. При расчетных напряжениях, превышающих предел пропорциональности, определяя устойчивость, нужно пользоваться теориями пластичности. Наиболее приемлемой надо признать теорию малых упругопластических деформаций — деформационную теорию. На основе этой теории начиная с 1944 г. получен ряд практических результатов.

На пластинки можно распространить подход, использованный для расчета устойчивости стержней в упругопластической стадии, а именно — не учитывать эффект разгрузки в момент выпучивания, т. е. рассчитывать по касательному модулю. Тогда соотношения между приращениями напряжений и деформаций будут в зонах догрузки и разгрузки одними и теми же. Нейтральная поверхность при этом будет совпадать со срединной поверхностью пластины.

Дифференциальное уравнение устойчивости прямоугольной пластинки, нагруженной по контуру напряжениями  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau$ :

$$\left[ 1 - \frac{3}{4} (1-\alpha) \frac{\sigma_x^2}{\sigma_i^2} \right] \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \left[ 1 - \frac{3}{4} (1-\alpha) \frac{\sigma_x \sigma_y + 2\tau^2}{\sigma_i^2} \right] \times \\ \times \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \left( 1 - \frac{3}{4} (1-\alpha) \frac{\sigma_y^2}{\sigma_i^2} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - 3(1-\alpha) \frac{\tau}{\sigma_i^2} \times \\ \times \left( \sigma_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + \sigma_y \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} \right) + \frac{\delta}{D'_c} \Pi(\sigma, w) = 0 \quad (6.26)$$

$$\text{при } \alpha = \frac{E_K}{E_c}, \quad E_K = \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i}, \quad E_c = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}, \quad \sigma_i = (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau^2)^{1/2}, \quad \varepsilon_i =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \gamma^2/4)^{1/2}, \quad D'_c = E_c \delta^3/9, \quad \Pi(\sigma, w) =$$

$$= \sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\tau \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

где  $\alpha$  — соотношение модулей;  $E_K$  — касательный модуль;  $E_c$  — секущий модуль;  $\sigma_i$  — интенсивность напряжений;  $\varepsilon_i$  — интенсивность деформаций;  $D'_c$  — цилиндрическая жесткость пластины, отвечающая секущему модулю при  $\mu = 0,5$ .

Заметим, что интенсивность напряжений выражается через интенсивность деформаций, т. е.  $\sigma_i = E_c \varepsilon_i$ .

Таким образом, задача обеспечения устойчивости изотропной пластины в упругопластической стадии сводится к изучению некоторой анизотропной пластины, жесткости которой в рамках принятой теории пластичности определяются уровнем напряженно-деформированного состояния. Решение уравнения устойчивости (6.26) получено лишь для частных случаев. Рассмотрим некоторые из них.

Если прямоугольная шарнирно опертая пластина со сторонами  $a$  (длина) и  $b$  (ширина) обжимается нагрузкой, равномерно распределенной по контуру, то  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_i = \sigma$ ;  $\tau = 0$ . Решение уравнения (6.26) будем искать в форме

$$w = a \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b),$$



принимая, что при выпучивании пластины в ее продольном и поперечном направлении образуется по одной полуволне. Потере устойчивости пластины соответствует следующее значение интенсивности критической деформации:

$$\varepsilon_i = \frac{\sigma}{E_c} = \frac{\pi^2}{36} (1 + 3\alpha) \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) \frac{\delta^2}{b^2}. \quad (6.27)$$

В случае сжатия прямоугольной пластинки в одном направлении имеем  $\sigma_x = \sigma_i = \sigma$ ;  $\sigma_y = \tau = 0$ . Дифференциальное уравнение устойчивости (6.26) получает простейший вид:

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{3}{4} \alpha\right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\delta \sigma}{D'_c} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (6.28)$$

Это уравнение показывает, что при сжатии пластины в одном направлении, ее свойства (жесткость) меняются в том же направлении. Жесткость в перпендикулярном направлении, а также крутильная жесткость соответствуют цилиндрической со своим секущим модулем. Решение уравнения (6.28) будем искать в форме

$$w = a \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b),$$

где  $m, n$  — число полуволн соответственно в продольном и поперечном направлениях, отвечающих минимальному значению критической нагрузки.

Для вытянутой в направлении сжатия шарнирно опертой по всем сторонам пластины критическая интенсивность деформаций

$$\varepsilon_{i\text{кр}} = \frac{\pi^2}{9} \cdot \frac{\delta^2}{b^2} (2 + \sqrt{1 + 3\alpha}). \quad (6.29)$$

При выпучивании шарнирно опертой прямоугольной пластины, сжатой в одном направлении, в поперечном направлении образуется одна полуволна ( $n = 1$ ). Тогда в общем случае шарнирно опертой по всем сторонам пластины критическая интенсивность деформаций определится наименьшим значением при варьировании целочисленного параметра  $m$ :

$$\varepsilon_{i\text{кр}} = \frac{\pi^2}{9} \cdot \frac{\delta^2}{b^2} \left[ \frac{1 + 3\alpha}{4} \left(\frac{b}{a}\right)^2 m^2 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{1}{m^2} + 2 \right]$$

при  $m \approx \frac{a}{b} \left(\frac{4}{1 + 3\alpha}\right)^{1/4}.$  (6.30)

Представляет практический интерес случай шарнирно опертой пластины с одним продольным свободным краем. Здесь решение уравнения устойчивости задается в виде

$$w = a(y/b) \sin(m\pi x/a).$$

Принято, что ось  $x$  совпадает с шарнирно опертым продольным краем пластинки.

Наименьшее значение критической силы получается при  $m = 1$ , т. е. вдоль  $x$  образуется одна полуволна. Критическая интенсивность деформаций

$$\varepsilon_{i \text{ кр}} = \frac{\pi^2}{9} \cdot \frac{\delta^2}{b^2} \left[ \frac{1+3\alpha}{4} \left( \frac{b}{a} \right)^2 + \frac{3}{\pi^2} \right]. \quad (6.31)$$

В случае удлиненной пластинки при  $b \ll a$  имеем

$$\varepsilon_{i \text{ кр}} = \frac{1}{3} \left( \frac{\delta}{b} \right)^2. \quad (6.31')$$

Формула (6.31') весьма проста и позволяет при заданном отношении  $b/\delta$  легко находить критическую деформацию. Далее по диаграмме деформирования  $\sigma - \varepsilon$  находят критическое напряжение.

Рассмотрим сдвиг пластинки, квадратной (со стороной  $a$ ), находящейся под действием касательных напряжений, равномерно распределенных по всем кромкам. Интенсивность напряжений  $\sigma_i = \tau \sqrt{3}$ . Дифференциальное уравнение устойчивости

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (1 + \alpha) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{2\delta}{D'_c} \tau \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0. \quad (6.32)$$

Обычно это уравнение решают методом Галеркина, полагая

$$W = \sum_m \sum_n a_{mn} \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/a).$$

Нахождение критического напряжения здесь связано с трудоемкими вычислениями. Приближенное значение критической деформации сдвига

$$\gamma_{\text{кр}} = \frac{\tau_{\text{кр}}}{E_c} = 10,2 \frac{E_c}{E} (0,75 + 0,25\alpha) \left( \frac{\delta}{a} \right)^2. \quad (6.33)$$

Приведенные данные служат основой для назначения толщин пластинчатых элементов сечений в тех случаях, когда несущую способность рассчитывают с допущением ограниченных пластических деформаций. Эти же данные могут быть использованы для разработки практического способа определения критических напряжений в упругопластической стадии по критическим напряжениям, найденным в предположении неограниченной упругости.

Для конкретных марок сталей можно пользоваться соответствующими графиками, позволяющими по «упругим» критическим напряжениям определять действительные критические напряжения в пластической стадии (рис. 6.6). При этом принимают, что пластины входят в состав сварной конструкции и соответственно вводят коэффициент условий работы 0,9, учитывающий влияние сварочных напряжений. Коэффициент условий работы в размере 0,9 вводят при напряжениях, не превышающих предел пропорциональности. В диапазоне напряжений от  $\sigma_{\pi}$  до расчетного сопротивления этот коэффициент увеличивают постепенно до единицы; при развитии пластических деформаций остаточные напряжения релаксируют и их влияние на устойчивость исчезает.

Значения предельных характеристик графика (см. рис. 6.6), соответствующих начальной точке площади текучести диаграммы деформирования, будут следующими:

Марка стали . . . . .	16Д	15ХСНД	10ХСНД
$\epsilon_{кр}$ , max . . . . .	0,0017	0,00232	0,00252
$\sigma_{кр}^*$ , max, МПа . . . . .	400	550	600
$\sigma_{кр}$ , max, МПа . . . . .	210	290	350
$\epsilon_p$ . . . . .	0,000605	0,000653	0,000615
$(b/\delta)_{1min}$ . . . . .	14	12	11,5
$(b/\delta)_{2min}$ . . . . .	44	38	36

Таким образом, если потерю устойчивости пластиной отождествлять с моментом выхода напряжений на площадку текучести, то получим конкретные минимальные отношения  $b/\delta$  при определенных нормативных значениях пластической деформации. В случае увеличения пластической деформации сверх нормативной, отношение  $b/\delta$  должно уменьшаться, т. е. пластина должна быть более толстой при неизменном  $b$ . Для такой пластины упругое критическое напряжение находится за пределами графика (см. рис. 6.6) и свидетельствует о избыточном запасе пластины по устойчивости по сравнению с нормативным, допустимым значением сжимающего напряжения или деформации. Если пластина находится в условиях сложного напряженного состояния, ее толщина (при неизменных длине и ширине) должна быть больше по сравнению с той же пластиной, но нагруженной в одном направлении. Таким образом возникает задача определения несущей способности по устойчивости пластин, находящихся в условиях сложного напряженного состояния в упругопластической стадии.

Для пояснения сказанного рассмотрим квадратную пластину, сжимаемую в одном направлении. При нормативной пластической деформации в размере 0,0006 и марке стали 16Д отношение ширины пластины к толщине должно быть примерно равно 44. Критическое напряжение при этом равно пределу текучести, т. е. расчетному сопротивлению. Рассмотрим далее ту же пластину, но нагруженную сжимающими напряжениями в двух направлениях. Естественно, что при той же нормативной интенсивности пластической деформации, пластина при двух-

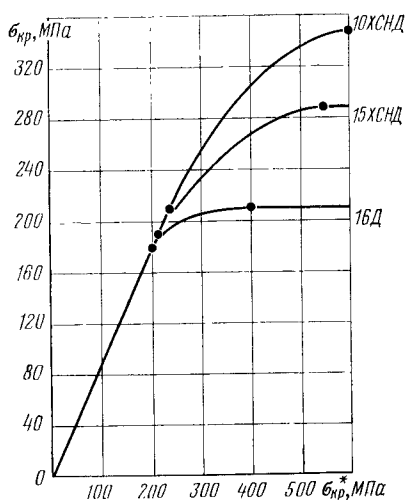


Рис. 6.6. График для перехода от «упругих» критических  $\sigma_{кр}^*$  напряжений к действительным  $\sigma_{кр}$

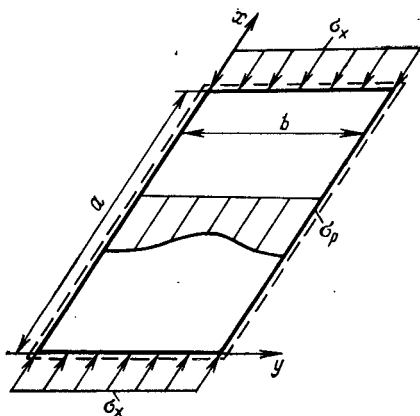


Рис. 6.7. Схема к расчету пластины в закритической стадии

если игнорировать возможность за критической работы пластин после потери устойчивости, т. е. в закритической упругой и упругопластической стадиях. Это особенно важно для случаев тонких пластин, подкрепленных продольными жесткими ребрами (рис. 6.7). До потери устойчивости пластины напряжения сжатия распределяются по ширине равномерно, а после выпучивания увеличиваются у ребер жесткости. В центральной части они близки к критическим, вычисленным по упругой стадии. Для определения нагрузок, которые могут быть восприняты пластинкой в закритической стадии, необходимо использовать геометрически нелинейные уравнения теории гибких пластин, т. е. исследовать ее работу при конечных значениях прогибов.

Рассмотрим частный случай нагружения прямоугольной шарнирно опертой пластины равномерно распределенными по ширине напряжениями. Считаем, что опорный контур пластины жесткий. Продольные грани ее после потери устойчивости остаются прямолинейными в плоскости пластины, а в поперечном направлении возможно свободное смещение продольных граней. Система уравнений теории гибких пластин имеет вид:

$$DV^2 \nabla^2 w = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \quad (6.34)$$

$$\frac{1}{E\delta} \nabla^2 \nabla^2 \Phi = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (6.34')$$

Так как рассматриваем шарнирно опертую пластину, прогиб задаем в виде

$$w = \sum_m \sum_n a_{mn} \sin (m\pi x/a) \sin (n\pi y/b).$$

осном сжатии должна иметь большую толщину. Используя формулу (6.27), получим  $\epsilon_{кри} = = (\pi^2/36) (\delta/b)^2$ . Принимая  $\epsilon_{кри} = = 0,0017$  будем иметь  $b/\delta = 12,7$ .

В большинстве важных случаев сложного нагружения сжатых пластин отсутствуют решения для упругопластической стадии. Поэтому приходится пользоваться приближенными приемами, основанными на решениях частных задач в упругопластической стадии.

Изучение действительного поведения сжатых пластин, входящих в состав стальных пролетных строений, не будет полным,

Подставляя это выражение в уравнение (6.34<sup>1</sup>) и интегрируя, получим

$$\Phi = E\delta \sum_m \sum_n \frac{b_{mn}}{[(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2]^2} \times \\ \times \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} + \frac{1}{2} C_1 x^2 + \frac{1}{2} C_2 y^2, \quad (6.35)$$

где  $b_{mn}$  — однородные алгебраические полиномы второй степени от  $a_{mn}$ . Выразим в аналитической форме граничные условия. По продольным граням нормальные напряжения

$$\sigma_y = \int_0^a \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dx = 0, \text{ откуда } C_1 = 0.$$

По поперечным граням нормальные напряжения равны внешнему воздействию

$$\frac{1}{b} \int_0^b \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} dy = -\sigma_x \delta, \text{ откуда } C_2 = \sigma_x \delta.$$

Проанализируем граничные условия пластины. Как уже сказано, после потери устойчивости кромки пластины остаются прямолинейными, что аналитически выразится:

$$u = \int_0^a \frac{\partial u}{\partial x} dx = \text{const}, \quad v = \int_0^b \frac{\partial v}{\partial y} dy = \text{const}.$$

Воспользуемся далее соотношениями теории упругости:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{E\delta} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right); \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 = \frac{1}{E\delta} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.36)$$

Подставляя сюда выражение для функции напряжений  $\Phi$  и выполняя интегрирование, получим:

$$u = -\frac{\sigma_x}{E} a - \frac{\pi^2}{8a} \sum_m \sum_n a_{mn}^2 m^2; \quad (6.37)$$

$$v = \mu \frac{\sigma_x}{E} b - \frac{\pi^2}{8b} \sum_m \sum_n a_{mn}^2 n^2. \quad (6.37')$$

К р и т е р и е м выполнения условия прямолинейности кромок служит независимость перемещений  $u$  и  $v$  на кромках от координат. Выражением (6.37) определяется укорочение пластины и соответственно продольных ребер жесткости, которые деформируются (вдоль) вместе с пластиной.

Напряжения в ребрах будут  $\sigma_p = (u/a) E$ . Тогда, используя формулу (6.37), получим для потерявшей устойчивость пластинки

$$\frac{\sigma_p}{E} = \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\pi^2}{8a^2} \sum_m \sum_n a_{mn}^2 m^2. \quad (6.38)$$

Здесь неизвестны пока коэффициенты  $a_{mn}$ . Для их определения нужно подставить выражения для  $w$  и равенства (6.38) в уравнение (6.34) и проинтегрировать последнее, например методом Бубнова — Галеркина. Число получаемых алгебраических уравнений зависит от числа удерживаемых членов в ряду для  $w$ .

Для практических расчетов удобно ввести понятие р е д у к ц и о н н о г о коэффициента  $\varphi = \sigma_x / \sigma_p$ , т. е. отношения среднего значения напряжений, действующих в пластинке (равны внешним напряжениям), к напряжениям в продольных ребрах жесткости. Развернутое выражение редуцированного коэффициента

$$\varphi = 1 - \frac{E}{\sigma_p} \cdot \frac{\pi^2}{8a^2} \sum_m \sum_n a_{mn}^2 m^2. \quad (6.39)$$

Рассмотрим в качестве примера квадратную пластину со стороной  $b$  и учтем в расчете один член ряда ( $a_{11} \neq 0$ ). Это равносильно предположению, что пластина искривляется по одной полуволне вдоль осей  $x$  и  $y$ . Она сжата в одном направлении напряжениями  $\sigma$ . В выражении для функции напряжений (6.35) получим  $b_{20} = b_{02} = E a_{11}^2 / 32$ , а другие коэффициенты обратятся в нуль. Физический смысл коэффициента  $a_{11}$  — это стрелка прогиба пластины, которую обозначим через  $f$ .

Далее находим размер взаимного сближения нагруженных кромок

$$u = -\sigma b / E - \pi^2 f^2 / (8b).$$

Соответственно относительная деформация в направлении сжатия

$$\varepsilon_x = \sigma / E + (\pi^2 / 8) (f/b)^2.$$

Напряжение в продольном ребре

$$\sigma_p = \sigma + E (\pi^2 / 8) (f/b)^2. \quad (6.40)$$

Для определения стрелки прогиба  $f$  в закритической стадии проинтегрируем уравнение (6.34) методом Бубнова-Галеркина. Общая формула метода получит вид:

$$\int_0^a \int_0^b A \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy = 0 \quad \text{при} \quad A = \frac{D}{\delta} \nabla^4 w - L(w, \Phi).$$

После подстановок и преобразований получаем следующее уравнение для стрелки прогиба:

$$f \sigma - \frac{4\pi^2 D}{b^2 \delta} f - E \frac{\pi^2}{8b^2} f^3 = 0.$$

Это уравнение можно представить в виде

$$\sigma = \sigma_{кр} + E (\pi^2/8) (f/b)^2$$

$$\text{при } \sigma_{кр} = 4\pi^2 D / (b^2 \delta), \quad (6.41)$$

где  $\sigma_{кр}$  — критическое напряжение по линейной теории пластин.

Выражая  $\sigma$  из уравнения (6.40) и сравнивая его с уравнением (6.41), получим  $\sigma = 0,5 (\sigma_{кр} + \sigma_p)$ . Редукционный коэффициент

$$\varphi = 0,5 (1 + \sigma_{кр}/\sigma_p). \quad (6.42)$$

Отсюда можно заключить, что редукционный коэффициент для линейно-упругой пластины при учете одного члена ряда всегда больше 0,5.

Эффективная ширина сжатой пластинки, потерявшей устойчивость,

$$b_a = \varphi b. \quad (6.43)$$

Эту величину нужно учитывать при подсчете площадей, моментов инерции и моментов сопротивления поперечного сечения пролетного строения.

Приведем окончательное выражение для редукционного коэффициента. С этой целью выразим напряжение в продольном ребре через среднее напряжение:  $\sigma_p = 2\sigma - \sigma_{кр}$ . В итоге получим

$$\varphi = 0,5 [1 + (2\alpha - 1)^{-1}] \text{ при } \alpha = \sigma/\sigma_{кр}. \quad (6.44)$$

Если  $\alpha = 1$ , закритическая стадия еще не проявится и  $\varphi = 1$ . В предположении неограниченной упругости и при  $\sigma \rightarrow \infty$ ,  $\varphi \rightarrow 0,5$ .

Относительное значение стрелки прогиба рассматриваемой здесь квадратной пластинки в закритической стадии работы:

$$f/b = \frac{1}{\pi} \sqrt{8 (\sigma - \sigma_{кр})/E}. \quad (6.45)$$

Заметим, что при  $\sigma = \sigma_{кр}$  и  $f/b = 0$ , что соответствует началу бифуркации форм равновесия в линейной теории устойчивости пластин.

Необходимо помнить, что полученные результаты относятся к упругой стадии и в расчетах удержан один член ряда, что завышает значение редукционного коэффициента.

График редукционного коэффициента (рис. 6.8) рассчитан методом конечных разностей [14] и его результаты нужно считать наиболее достоверными.

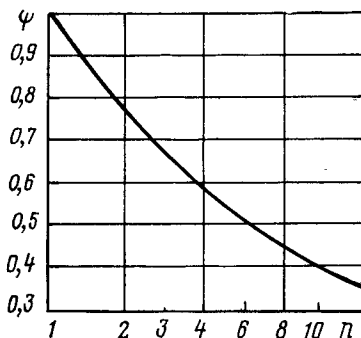


Рис. 6.8. Зависимость редукционного коэффициента  $\varphi$  от  $n = \sigma_p/\sigma_{кр}$

## 6.7. ПЛАСТИНЫ С НАЧАЛЬНЫМИ ИСКРИВЛЕНИЯМИ

Пластинчатые элементы стальных пролетных строений имеют неизбежные начальные искривления, вызываемые технологическими причинами. Значения допустимых искривлений обычно нормируются. Так в ряде стран принято, что для пластины стрелка начального выгиба в средней по поверхности точке не должна превышать  $1/200$  ширины пластины. Считается, что контур пластины остается плоским. В рассматриваемом случае имеем дело с устойчивостью 2-го рода, когда с самого начала нагружения пластины сжимающими напряжениями растут прогибы. Критическое состояние характеризуется тем, что напряжение (нагрузка) достигает максимума и дальнейшее увеличение деформаций сопровождается падением нагрузки.

Имеют место особенности поведения пластин в критическом состоянии, связанные с характером закрепления краев в плоскости пластины. Представляют интерес два предельных случая — свободное искривление (деформация) всех кромок в плоскости пластины и поступательное перемещение всех ее кромок при сохранении их прямолинейности. В реальных конструкциях характер закрепления краев пластины более сложный и определяется сечением и формой окаймляющих элементов — продольных и поперечных ребер жесткости, поясов. При свободной деформации кромок начальное искривление пластины из ее плоскости всегда уменьшает критическую нагрузку по сравнению с плоской пластиной, а при сохранении прямолинейности кромок возможно как уменьшение, так и увеличение критической нагрузки в зависимости от гибкости пластины и стрелки ее начального выгиба.

В соответствии с характером граничных условий должны изменяться и методы расчета сжатых пластин. Если отсутствуют на контуре препятствия смещениям пластины в ее плоскости, достаточна теория жестких пластин, т. е. линейная теория. Дифференциальное уравнение равновесия первоначально искривленной жесткой пластины

$$D \nabla^2 \nabla^2 w_1 + k \delta \left[ \sigma_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} (w_1 + w_0) + \sigma_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} (w_1 + w_0) - 2 \tau_{xy} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (w_1 + w_0) \right] = 0, \quad (6.46)$$

где  $w_1$  — функция дополнительного прогиба от нагрузки;  $k$  — параметр сжимающей нагрузки, действующий в плоскости пластинки;  $w_0$  — функция начальных прогибов.

Уравнение (6.46) описывает только упругое поведение пластины. Его распространение на упруго-пластическую область возможно при условии введения приближенных критериев устойчивости, типа «устойчивой прочности».

Если на контуре пластины имеются ребра или другие элементы, препятствующие смещениям в ее плоскости, то важную роль начи-



нают играть напряжения в срединной поверхности (мембранные напряжения) и необходимо применять теорию гибких пластин. При этом рассматривают систему дифференциальных уравнений, в которой изгиб и плоское напряженное состояние пластины оказываются взаимно зависимыми вследствие геометрической нелинейности задачи.

Обозначая через  $\Phi(x, y)$  функцию напряжений плоской задачи теории упругости, система уравнений по теории гибких искривленных пластин [11] имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} D \nabla^2 \nabla^2 \omega_1 - \delta \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\omega_1 + \omega_0) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\omega_1 + \omega_0) - \right. \\ \left. - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\omega_1 + \omega_0) \right] = 0; \\ \nabla^2 \nabla^2 \Phi - E \left[ \left( \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x \partial y} - \right. \\ \left. - \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial y^2} \right] = 0. \end{aligned} \right\} (6.47)$$

Здесь функция начального искривления (прогиба) на контуре равна нулю. Задание граничных условий поясним на примере прямоугольной пластины, равномерно сжатой в продольном направлении. Пусть при изгибе пластина на краях имеет шарнирное опирание. Это дает два условия на каждой грани:  $\omega_1 = 0$ ;  $\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial n^2} = 0$  (где  $n$  — нормаль к контуру). В плоскости пластины ставится условие, что ее грани, оставаясь прямолинейными, могут поступательно перемещаться, т. е.

$$\int_0^a u_x dx = \text{const}; \int_0^b v_y dy = \text{const}$$

Тогда с позиций плоского напряженного состояния на контуре пластины граничные условия получают вид (при условии четности функций  $\omega_1$ ,  $\omega_0$ ,  $\Phi$ ):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0; \frac{\partial^3 \Phi}{\partial n^3} = 0; \int_0^a \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dx = 0; \frac{1}{b} \int_0^b \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} dy = -\sigma_x.$$

Решать данную геометрическую нелинейную задачу целесообразно на ЭВМ; можно пользоваться и методом Бубнова — Галеркина [11]. Здесь также для упругопластической стадии необходимо привлекать приближенные критерии предельного состояния.

Для плоских пластин без начального искривления уравнениями (6.48) описывается закритическое поведение сжатых пластин после потери устойчивости в упругой стадии работы материала.

Более конкретно рассмотрим влияние начального искривления на несущую способность сжатых пластин для четырех случаев:

1. Для прямоугольной свободно опертой пластины, равномерно сжатой в продольном направлении распределенной нагрузкой  $N_x$ :

начальное искривление  $w_0 = f_0 \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b)$ ;  
упругий прогиб пластины

$$w_1 = f_1 \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b).$$

После подстановки его в уравнение (6.46) получим

$$w_1 = \frac{\alpha f_0}{(1-\alpha)} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

при  $\alpha = N_x / N_{x_{кр}}$ ;  $N_{x_{кр}} = D (\pi/a^2 + 2\pi^2/b^2 + a^2 \pi^2/b^4)$ .

Величина  $N_{x_{кр}}$  представляет собой критическую нагрузку плоской пластины в предположении неограниченной упругости материала.

Аналитически критическое состояние можно определить на основании одного из приближенных критериев. Наиболее простой критерий — условие наступления текучести в одной, наиболее напряженной, точке:

$$\max |\sigma_{x0} + \Delta\sigma_{xи}| = \sigma_T,$$

где  $\sigma_{x0}$  — осевое напряжение в критическом состоянии;  $\sigma_{xи}$  — краевое напряжение от изгиба пластинки в критическом состоянии.

Б. М. Броуде [11] использовал более точный критерий:

$$\max |\sigma_{x0} + \Delta\sigma_{xи} / \sqrt{2}| = \sigma_T.$$

Дополнительные напряжения от изгиба

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_{xи} &= -\frac{E\delta}{2(1-\mu^2)} \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right) = \\ &= \frac{\pi^2 E f_0 \delta}{2(1-\mu^2) b^2} \left( \frac{b^2}{a^2} + \mu \right) \frac{\alpha}{1-\alpha} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \end{aligned}$$

Рассмотрим квадратную пластинку ( $b = a$ ). Для точки в центре квадрата условие потери устойчивости:

$$\sigma + \frac{\pi^2 E f_0 \delta}{(1-\mu^2) b^2} \cdot \frac{1}{\sigma_0 / \sigma - 1} = \sigma_T \text{ при } \sigma_x = N/\delta, \sigma_0 = N_{x_{кр}}/\delta.$$

Искомым является напряжение  $\sigma$ , которое определяет несущую способность искривленной пластины по устойчивости. Уменьшение критического напряжения за счет начального искривления можно характеризовать отношением  $\sigma/\sigma_0$ , которое вычислено Б. М. Броуде для стали с пределом текучести 240 МПа. Представляют интерес численные значения этого отношения при стрелке начального искривления  $f_0 = b/200$  для квадратной пластины:

$b/\delta$	60	70	80	100
$\sigma/\sigma_0$	0,66	0,73	0,78	0,84

Анализ этих данных показывает, что начальные искривления более чувствительны для относительно толстых пластинок. Так, при  $b/\delta = 60$  критическое напряжение снижается на 34%. Однако нужно помнить об условности расчетной схемы (свобода деформаций контура в плоскости пластинки) и приближенности критерия устойчивости.

2. Прямоугольная свободно опертая пластина, подверженная чистому изгибу в ее плоскости имеет начальное искривление такое же, как в рассмотренной равномерно сжатой. Для пластины с соотношением сторон  $a/b = 0,95$  и при  $\sigma_T = 240$  МПа на основе данных Б. М. Броуде имеем соотношение  $\sigma/\sigma_0 = 0,76$  при  $f_0 = b/200$ . Следовательно, при градиентном напряженном состоянии пластина чувствительна к начальным искривлениям.

3. Случай, когда прямоугольная свободно опертая пластина, равномерно нагруженная на одном (продольном) крае, соответствует вертикальному сжатию стенки балки от временной нагрузки или от реакции опорных частей. Начальное искривление примем таким же, как в предыдущих пластинах. Приведем соотношения  $P/P_0$  для квадратной пластины, если  $f_0 = b/200$  и  $\sigma_T = 240$  МПа по данным Б. М. Броуде:

$$P/p_0 = 0,77 \text{ при } b/\delta = 100;$$

$$p/p_0 = 0,66 \text{ при } b/\delta = 75.$$

4. Возьмем прямоугольную свободно опертую пластину равномерно сжатую в продольном направлении, кромки которой подкреплены в ее плоскости абсолютно жесткими и на изгиб ребрами (геометрически нелинейная задача). Рассмотрение этого случая позволяет оценить влияние окаймляющих жестких таких ребер, что с практической точки зрения весьма важно. Функцию начального искривления примем такой же, как и выше.

На основе вычислений Б. М. Броуде соотношения  $\sigma/\sigma_0$  и  $\omega_{1\max}/\delta$  при  $f_0 = b/200$  и  $\sigma_T = 240$  МПа имеют следующие значения:

$b/\delta$ . . . . .	60	70	80	100
$\sigma/\sigma_0$ . . . . .	0,76	0,97	1,22	1,92
$\omega_1/\delta$ . . . . .	0,44	0,66	0,91	1,42

Следовательно, при стеснении деформации срединной поверхности пластины возможно увеличение критической силы по сравнению со случаем свободной деформации краев пластины. В данном примере это проявляется при отношении  $b/\delta > 80$ .

Таким образом, конструктивными мерами можно регулировать критическое напряжение пластины без изменения ее геометрических размеров. Нужно подчеркнуть, что в стальных конструкциях пролетных строениях мостов со сплошными главными балками всегда имеются окаймляющие пластину элементы. Однако обычно их характеристики учитывают только с позиций изгиба пластины, что свидетельствует о недоиспользованных резервах несущей способности конструкций. В то же время закритическая стадия работы

пластины может быть весьма ограниченной или отсутствовать вообще. Последнее имеет место для сравнительно толстых пластин (в рассмотренном примере при  $b/\delta < 70$ ). Соответственно можно установить ориентировочно пределы применимости линейной и нелинейной теории для пластин, сжатых в одном направлении. Для стали с пределом текучести  $\sigma_T = 240$  МПа линейная теория дает приемлемые результаты при  $b/\delta < 50$ , т. е. для пластин, теряющих устойчивость 1-го рода в упругопластической стадии.

## 6.8. КОНСТРУКТИВНО-АНИЗОТРОПНЫЕ ПЛАСТИНЫ

В рамках деформационной теории пластичности возможны два подхода к расчету устойчивости пластин — с учетом эффекта разгрузки при выпучивании и без его учета. В последнем случае, называемом также теорией устойчивости в условиях продолжающегося нагружения, решения отличаются сравнительной простотой и удовлетворительно совпадают с экспериментальными данными. Значения критических напряжений, найденных без учета разгрузки, соответствуют нижней их границе и совпадают со значениями для нелинейно-упругого тела с заданной диаграммой деформирования. Рассмотрим устойчивость конструктивно-анизотропной пластины (рис. 6.9), что соответствует, например, проверке устойчивости сжатого пояса коробчатой балки.

Для конструктивно-анизотропных пластин зависимости между напряжениями и деформациями в упругопластической стадии нужно принимать по аналогии с зависимостями для основного материала. При коэффициенте Пуассона  $\mu = 0,5$  эти зависимости имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E_c} (\sigma_x - 0,5\alpha_y \sigma_y); & \varepsilon_y &= \frac{1}{E_c} (\sigma_y - 0,5\alpha_x \sigma_x); \\ \gamma_{xy} &= \frac{3}{E_c} \cdot \frac{\alpha_x}{\alpha_{xy}} \tau_{xy}; & \gamma_{yx} &= \frac{3}{E_c} \cdot \frac{\alpha_y}{\alpha_{xy}} \tau_{yx}, \end{aligned} \right\} \quad (6.48)$$

или, в другой форме:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \beta E_c (\varepsilon_x + 0,5\alpha_y \varepsilon_y); & \sigma_y &= \beta E_c (\varepsilon_y + 0,5\alpha_x \varepsilon_x); & \tau_{xy} &= \\ & & &= \frac{E_c}{3} \cdot \frac{\alpha_{xy}}{\alpha_x} \gamma_{xy}; \\ \tau_{yx} &= \frac{E_c}{3} \cdot \frac{\alpha_{xy}}{\alpha_y} \gamma_{yx} & \text{при } \beta &= (1 - 0,25\alpha_x \alpha_y)^{-1}, \end{aligned} \right\} \quad (6.49)$$

где  $E_c$  — секущий модуль;  $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_{xy}$  — коэффициенты заполнения, отражающие конструктивную анизотропию пластин ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ).

Условие парности касательных напряжений выполняется для средних касательных напряжений, т. е.  $\tau_{xy}\alpha_x = \tau_{yx}\alpha_y$ . Зависимость между интенсивностями напряжений и деформаций для основного

материала выражается так:  $\varepsilon_i = \sigma_i/E_c$ . Вводя обозначения  $S_x = \sigma_x - 0,5\alpha_y \sigma_y$ ,  $S_y = \sigma_y - 0,5\alpha_x \sigma_x$ , для нормальных напряжений получим:

$$\sigma_x = \beta (S_x + 0,5\alpha_y S_y);$$

$$\sigma_y = \beta (S_y + 0,5\alpha_x S_x).$$

Кроме того, следует иметь в виду, что  $S_x = \varepsilon_x E_c$  и  $S_y = \varepsilon_y E_c$ .

Принимая докритическое нагружение простым, напряжения и деформации в некоторой точке пластины к моменту выпучивания обозначим соответственно

$\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau$  и  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\gamma$ . Искривление пластины в момент потери устойчивости вызывает вариации деформаций (вариациями деформаций срединной поверхности пренебрегаем):  $\delta\varepsilon_x = -z\delta\chi_x$ ;  $\delta\varepsilon_y = -z\delta\chi_y \times \delta\gamma = 2z\delta\chi_{xy}$ . Для вариаций составляющих напряжений, если вариации внешних сил равны нулю, по аналогии с указанным А. С. Вольмиром [14] способом можно получить:

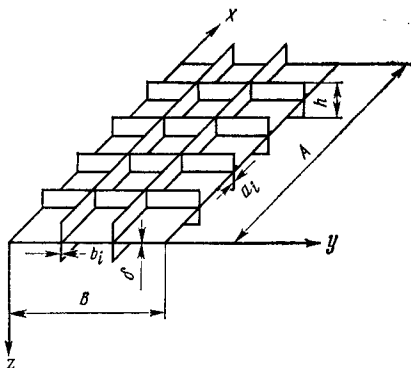


Рис. 6.9. Схема конструктивно-анизотропной пластины

$$\left. \begin{aligned} \delta S_x &= -E_c \delta\kappa_x + \frac{\varepsilon_x z}{\sigma_i \varepsilon_i} (E_c - E_R) (\sigma_x \delta\kappa_x + 2\tau_{xy} \kappa_{xy} + \sigma_y \delta\kappa_y); \\ \delta S_y &= -E_c \delta\kappa_y + \frac{\varepsilon_y z}{\sigma_i \varepsilon_i} (E_c - E_R) (\sigma_x \delta\kappa_x + 2\tau_{xy} \kappa_{xy} + \sigma_y \delta\kappa_y); \end{aligned} \right\} (6.50)$$

$$\delta\tau_{xy} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{\alpha_{xy}}{\alpha_x} E_c z \delta\kappa_{xy} + \frac{\tau_{xy} z}{\sigma_i^2} (E_c - E_R) (\sigma_x \delta\kappa_x + 2\tau_{xy} \delta\kappa_{xy} + \sigma_y \delta\kappa_y) \text{ при } E_R = \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i},$$

где  $E_R$  — касательный модуль;  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  — напряжения в точках срединной плоскости пластины, вызванные внешними силами, приложенными по контуру.

Вариации внутренних моментов:

$$\begin{aligned} \delta M_x &= \int_{-0,5h}^{0,5h} \alpha_x \delta\sigma_x z dz = \int_{-0,5h}^{0,5h} \alpha_x \beta (\delta S_x + 0,5\alpha_y \delta S_y) z dz; \quad \delta M_y = \\ &= \int_{-0,5h}^{0,5h} \alpha_y \delta\sigma_y z dz = \int_{-0,5h}^{0,5h} \alpha_y \beta (\delta S_y + 0,5\alpha_x \delta S_x) z dz; \quad \delta M_{xy} = \\ &= \delta M_{yx} = \int_{-0,5h}^{0,5h} \alpha_x \delta\tau_{xy} z dz. \end{aligned}$$

Подставляя в данные выражения, соответствующие вариации напряжений, и учитывая, что  $\chi_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ ;  $\chi_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ ;  $\chi_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ , будем иметь:

$$M_x = -\alpha_x \frac{Eh^3}{12} \left[ \beta \varphi_c \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 0,5 \alpha_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{\sigma_x}{\sigma_i^2} (\varphi_c - \varphi_K) \left( \sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tau_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right];$$

$$M_y = -\alpha_y \frac{Eh^3}{12} \left[ \beta \varphi_c \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 0,5 \alpha_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{\sigma_y}{\sigma_i^2} (\varphi_c - \varphi_K) \left( \sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tau_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right];$$

$$M_{xy} = -\frac{Eh^3}{12} \left[ \frac{2}{3} \varphi_c \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left( \frac{\delta^3}{h^3} - \frac{\delta^3}{h^3} \alpha_{xy} + \alpha_{xy} \right) - \frac{\tau_{xy} \alpha_x}{\sigma_i^2} (\varphi_c - \varphi_K) \left( \sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tau_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right]$$

при  $\varphi_c = E_c/E$ ,  $\varphi_K = E_K/E$ .

Выражение для  $M_{xy}$  получено в предположении, что для листа толщиной  $\delta$  принято  $\alpha_{xy} = 1$ .

Уравнение равновесия элемента пластины в случае малых прогибов

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2T_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Для получения дифференциального уравнения прогибов пластины нужно подставить в данное выражение моменты. В общем случае переменных значений усилий по кромкам пластины  $N_x(y)$ ,  $N_y(x)$ ,  $T(x, y)$  уравнение получается сложным, поэтому целесообразно рассматривать частные виды приложения нагрузки. В случае равномерных сжатия и сдвига параметры  $\varphi_c$ ,  $\varphi_K$  и  $\sigma_i$  постоянны во всех точках пластины и решение упрощается.

Пусть  $N_x = \text{const}$ , а  $N_y = T_{xy} = 0$ . Дифференцируя функции моментов и подставляя их в уравнение равновесия, имеем

$$D_x \left( 1 + \frac{\varphi_K}{\beta \varphi_c} - \frac{1}{\beta} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{N_x}{\varphi_c} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (6.51)$$

при  $D_x = \alpha_x \beta D$ ,  $D_y = \alpha_y \beta D$ ,  $2D_{xy} = D [\alpha_x \alpha_y \beta + (4/3) (\delta^3/h^3 - \delta^3 \alpha_{xy}/h^3 + \alpha_{xy})]$ ,  $D = Eh^3/12$ .

Полученное дифференциальное уравнение устойчивости в упругопластической стадии отличается от аналогичного для упругой стадии наличием множителей при  $D_x$  и  $N_x$ , а также коэффициентом  $\beta$  в значениях жесткостей.

По нашему мнению, эти выражения для жесткостей более правильно отражают конструктивную анизотропию пластин, что оказывается следствием учета коэффициентов заполнения в зависимостях для деформаций при плоском напряженном состоянии.

Принимая решение в виде  $\omega = f \sin(m\pi x/A) \sin(\pi y/B)$ , получим критические усилия

$$N_{x \text{ кр}} = \frac{\pi^2}{B^2} \varphi_c \left( \omega D_x \frac{1}{\lambda^2} + D_y \lambda^2 + 2D_{xy} \right) \quad (6.52)$$

$$\text{при } \omega = \varphi_k / (\beta \varphi_c) - 1 / \beta + 1, \lambda = A / (mB) .$$

Минимальное значение критического усилия найдем из условия  $\frac{\partial N}{\partial \lambda} = 0$ , что дает  $\lambda = \sqrt{\omega D_x / D_y}$ . Таким образом, критическое усилие

$$\min N_{x \text{ кр}} = \frac{2\pi^2}{B^2} \varphi_c (\sqrt{\omega D_x D_y} + D_{xy}), \quad (6.53)$$

критическая деформация

$$\varepsilon_{x \text{ кр}} = \frac{2\pi^2}{\delta_{\text{пр}x} B^2} (\sqrt{\omega D_x D_y} + D_{xy}), \quad (6.54)$$

где  $\delta_{\text{пр}x}$  — приведенная толщина пластины.

Для конструктивно-анизотропной пластины, показанной на рис. 6.9, при условии  $\delta \ll h$  коэффициенты заполнения

$$\alpha_x = \frac{\sum b_i}{B}, \quad \alpha_y = \frac{\sum a_i}{A} .$$

Коэффициент  $\alpha_{xy}$  отражает повышенную податливость на сдвиг вследствие конструктивной анизотропии. Для сплошного листа  $\alpha_{xy} = 1$ ; при неполном его заполнении определяется из решения соответствующей задачи, например из расчета замкнутой рамы. Характерно для рассматриваемого случая конструктивной анизотропии то, что каждая в отдельности жесткости  $D_x$  и  $D_y$  зависят от  $\alpha_x$  и  $\alpha_y$ . А жесткость  $D_{xy}$  зависит как от  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$ , так и  $\alpha_{xy}$ . Эти особенности наиболее полно отражают конструктивную анизотропию пластин.

При неравномерном распределении внешних сил для получения решений нужно пользоваться энергетическим или численными методами.

На основе полученного решения автором разработан практический метод расчета пластинчатых элементов в упругопластической стадии, использованный при проектировании коробчатых балок. Для упругой стадии работы материала получены реше-

ния при более широких предположениях в отношении характера и видов нагрузки. Приведем результаты для некоторых характерных случаев.

С л у ч а й 1 — действие нормальных напряжений, распределенных по линейному закону по ширине пластины; все стороны удлиненной пластины шарнирно оперты. Критические напряжения:

$$\sigma_{кр}^* = \frac{\alpha^2 \pi^2 \bar{D}}{\delta_{прx} B^2}; \quad \bar{D} = \frac{1}{2} \sqrt{D_x D_y} \left( 1 + \frac{D_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}} \right);$$

для пластин, имеющих опирание по двум сторонам, коэффициент

$$\alpha = \sqrt{4 + 3,8\xi^2,33};$$

то же, одну опертую и одну свободную стороны

$$\alpha = \sqrt{0,425 + 0,085\xi^2} \quad \text{при } \xi = 1 - \sigma_{\min}/\sigma_{\max},$$

где  $\delta_{прx}$  — приведенная толщина листа, подкрепленного поперечными и продольными ребрами;  $B$  — ширина пластины.

С л у ч а й 2 — действие касательных напряжений для шарнирно опертых продольных сторон

$$\sigma_{кр}^* = \tau_{кр}^* \sqrt{3} = \frac{2\pi^2 \sqrt{3D_x D_y}}{\delta_{прx} B^2} \sqrt{4 + 3 \frac{\sqrt{D_x D_y}}{D_{xy}} + \frac{D_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}}}.$$

С л у ч а й 3 — равномерно сжатая анизотропная пластина шириной  $B$  и длиной  $A$ . Критическое напряжение

$$\sigma_{кр}^* = \frac{\pi^2}{\delta_{прx} B^2} \left[ m^2 D_x \left( \frac{B}{a} \right)^2 + D_y \left( \frac{a}{b} \right)^2 \frac{1}{m^2} + 2D_{xy} \right].$$

Здесь  $m = 1$  при  $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 4$ ;  $m_2 = 2$  при  $\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 36$ ;  $m = 3$  при  $\alpha_1 = 36, \alpha_2 = 114$ ; ..., но

$$\sqrt[4]{\alpha_1 D_x / D_y} \leq \frac{a}{B} \leq \sqrt[4]{\alpha_2 D_x / D_y}.$$

Переход от  $\sigma_{кр}^*$  к  $\sigma_{кр}$  осуществляется по графику (см. рис. 6.6) по аналогии с изотропными пластинами.

Устойчивость 2-го рода конструктивно-анизотропных пластин, имеющих начальное искривление, приходится рассматривать на основе приближенных критериев, используя упругое решение. Для прямоугольной пластины, свободно опертой по четырем сторонам и имеющей начальный прогиб

$$w_0 = f_0 \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/B),$$

при сжатии вдоль оси  $x$  упругое решение

$$w = w_0 + w_1 = \frac{f_0}{1-\alpha} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{B}$$

$$\text{при } \alpha = N_x \left( D_x \frac{\pi^2}{a^2} + 2D_{xy} \frac{\pi^2}{B^2} + D_y \frac{a^2 \pi^2}{B^4} \right)^{-1}.$$



Приведенные решения для конструктивно-анизотропных пластин могут использоваться для проверки общей устойчивости стенок сплошных балок, подкрепленных рядом продольных и поперечными ребрами, а также ребристых и ортотропных плит, составляющих поперечное сечение коробчатых балок.

### 6.9. СТЕНКИ СПЛОШНЫХ БАЛОК

Балки со сплошными стенками, как правило, подкрепляют системой ребер поперечных, или поперечных и продольных. Путь подкрепления стенки ребрами ведет к более экономичной конструкции по сравнению с гладкой стенкой увеличенной толщины. От правильного назначения размеров ребер жесткости существенно зависит несущая способность балки; в то же время излишние запасы в сечениях ребер ведут к неоправданному перерасходу стали.

При полном использовании критического напряжения в пластинах целесообразно ребра назначать жесткими (негнуцимся), а при неполном использовании критического напряжения — упругими (гнуцимся). Последний случай имеет место, например, в балке, стенка которой по конструктивным соображениям на определенной длине, охватывающей ряд отсеков, сохраняется постоянной толщины. Поскольку интересна работа пластины как в упругой, так и в упругопластической стадиях, нужен соответствующий метод получения дифференциального уравнения устойчивости.

Ф. Блейхом для данного случая принято приближенное уравнение устойчивости пластинки:

$$D \frac{E_K}{E} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \sigma_x \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Для упругой стадии это уравнение приводит к точному решению при установлении размеров ребер жесткости.

Рассмотрим три случая подкрепленных пластин.

1. В свободно опертой пластине, подкрепленной одним продольным ребром жесткости (рис. 6.10, а), имеет место симметрия. Перемещение при выпучивании пластины из ее плоскости будет или симметричным или кососимметричным. Симметричная форма потери устойчивости соответствует случаю упругого (гнущегося) ребра, что возможно при его моменте инерции меньшем предельного  $J_0$ . Кососимметричная форма потери устойчивости имеет место при моменте инерции ребра  $J_p > J_0$ , а при  $J_p = J_0$  возможны обе формы потери устойчивости.

Нужно отметить, что критическое напряжение пластины при кососимметричной форме выпучивания не зависит от момента инерции продольного ребра и определяется как для шарнирно опертой по всем сторонам пластинки с шириной  $0,5 b$ . Таким образом, значение момента инерции ребра  $J_0$  — предельно минимальное и обеспечивает одновременное выпучивание пластины с ребром и

местное ее выпучивание. Можно также считать величину  $J_0$  нижним значением для жесткого (негнувшегося) ребра. Для продольного негнувшегося ребра жесткости момент инерции

$$J_0 = Db\gamma_0/E = 0,092b\delta^3 \gamma_0, \quad (6.55)$$

$$\text{при } \gamma_0 = 11,4\alpha + (1,25 + 16\beta)\alpha^2 - 5,4\sqrt{\alpha}, \quad \alpha = a/b, \quad \beta = F_p/(b\delta),$$

где  $b$  — ширина пластинки;  $\delta$  — ее толщина;  $F_p$  — площадь поперечного сечения продольного ребра

В случае, если  $\gamma_0$  больше величины  $\gamma_{0 \max} = 24,4 + 112\beta \cdot (1 + \beta)$ , его необходимо принять равным  $\gamma_{0 \max}$ . Приведенная формула для  $\gamma_0$  справедлива при  $0 \leq \beta \leq 0,20$ .

Следовательно, если момент инерции продольного ребра жесткости больше  $J_0$ , каждая панель пластины выпучивается как свободно опертая при критическом напряжении  $\bar{\sigma}_{кр}^* = 14,46 E \times (\delta/b)^2$ ; причем переход к  $\bar{\sigma}_{кр}$  осуществляется по графику (см. рис. 6.6). Это критическое напряжение не зависит от момента инерции ребра, а любое увеличение  $J$  сверх значения  $J_0$  не повышает устойчивость подкрепленной пластинки, если не учитывать за критическую стадию работы.

Как уже указывалось, практический интерес представляет случай гнущихся ребер, когда по заданному критическому напряжению  $\bar{\sigma}_{кр}$  требуется определить необходимый момент инерции упругого продольного ребра. Критическое напряжение  $\bar{\sigma}_{кр}^{\infty} < \bar{\sigma}_{кр}$

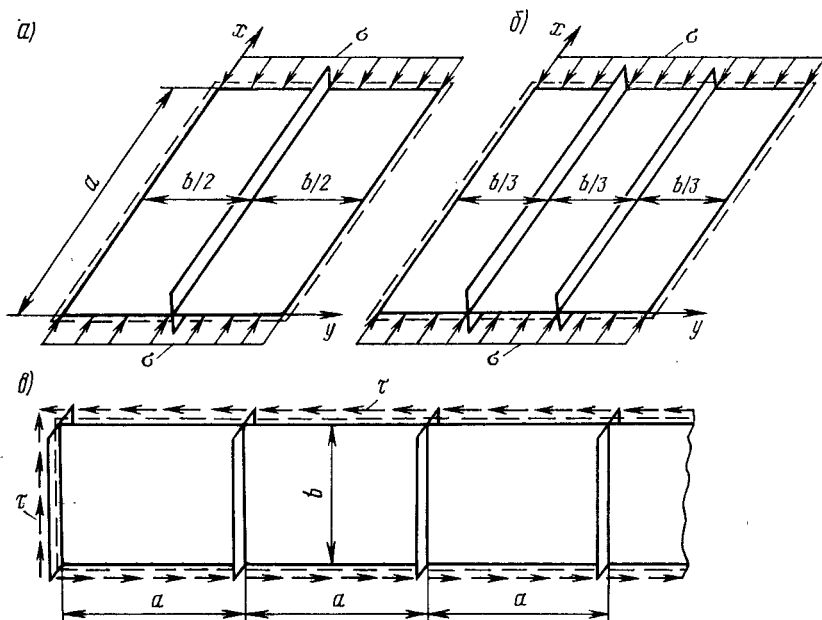


Рис. 6.10. Схемы пластин, подкрепленных ребрами жесткости

и равно действующему от заданной нагрузки напряжению.

Момент инерции ребра

$$\bar{J} = 0,092b\delta^3 \gamma, \quad (6.56)$$

$$\text{при } \gamma = \Phi + \left(\frac{\alpha}{n}\right)^2 \kappa \beta,$$

$$\kappa = \sigma_{кр}^* \left[ \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{\delta}{b}\right)^2 \right]^{-1},$$

где  $n$  — число полуволов в продольном направлении.

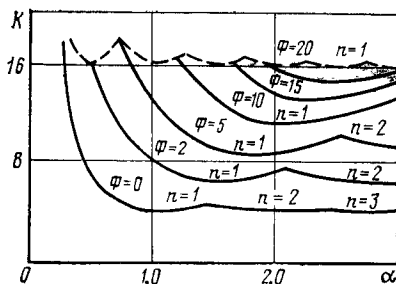


Рис. 6.11. Графики для определения параметра  $K$

Величина  $\sigma_{кр}^*$  определяется по графику (см. рис. 6.6) по значению  $\sigma_{кр}$ , а параметр  $\Phi$  по рис. 6.11 в зависимости от отношения сторон пластинки, т. е. от  $\alpha = a/b$ , и коэффициента устойчивости пластинки  $K$ . В последнем случае величина  $\bar{J} < \bar{J}_0$ , а форма выпучивания относительно продольной оси симметричная.

2. Рассматривая свободно опертую пластину с двумя продольными и равностоящими ребрами жесткости (рис. 6.10, б), возьмем только случай жестких ребер, когда в поперечном направлении потеря устойчивости происходит по трем полуволам.

Момент инерции определяется по формуле (6.55), а коэффициент

$$\gamma_0 = 14,5 \sqrt{\alpha^3} + 36\alpha^2 \beta.$$

Предельная величина  $\gamma_0$  не должна превышать значения

$$\gamma_0 \max = 96 + 610\beta + 975\beta^2.$$

Эти формулы справедливы при  $0 < \beta < 0,20$ .

Для критического напряжения подкрепленной пластины  $\bar{\sigma}_{кр}^* = 32,5 E (\delta/b)^2$ , а переход к  $\bar{\sigma}_{кр}$  производится по графику (см. рис. 6.6).

3. Если стенка балки подкреплена поперечными ребрами и подвержена действию касательных напряжений (рис. 6.10, в), приведем формулу критических касательных напряжений для шарнирно опертой по всем сторонам пластинки длиной  $a$  и шириной  $b$ . Принимая  $\alpha = a/b$ , имеем:

$$\tau_{кр}^* = \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{\delta}{b}\right)^2 K; \quad (6.57)$$

$$K = (5,34 + 4/\alpha^2) \text{ при } \alpha \geq 1; \quad K = (4 + 5,34/\alpha^2) \text{ при } \alpha \leq 1.$$

Рассматривая данную пластину (стенку), подкрепленную поперечными ребрами, нужно отметить, что теоретически не существуют предельных значений  $\gamma_0$  для поперечных ребер (точнее, величина

на  $\gamma \rightarrow \infty$ ). Однако для практических расчетов величина  $\gamma_0$  может быть назначена [7]

$$\gamma_0 = 4(7/\alpha^2 - 5). \quad (6.58)$$

Если заданы размеры поперечных ребер жесткости, критическое напряжение можно определять по формуле (6.57), но тогда коэффициент

$$K = 5,34 + (5,5/\alpha^2 - 0,6) \sqrt[3]{\gamma/\gamma_0}.$$

Это выражение применимо при условии

$$1 \leq 1/\alpha \leq 5 \text{ и } 0 \leq \gamma(7/\alpha^2 - 5)^{-1} \leq 4.$$

Если оказывается, что  $\gamma > \gamma_0$ , то принимают  $K = 4,74 + 5,5/\alpha^2$ .

Последним выражением, не зависящим от  $\gamma$ , определяется максимально возможное при данном  $\alpha$  критическое касательное напряжение.

Возможна другая постановка задачи, а именно: по заданному критическому напряжению определить момент инерции поперечного ребра:

$$J = \frac{a\delta^3}{12(1-\mu^2)} (K-5,34)^3 \frac{\gamma_0}{(5,5/\alpha^2 - 0,6)^3}, \quad (6.59)$$

Значение  $K$  вычисляют по формуле (6.57) для заданного  $\tau_{кр}^*$ . Формула (6.59) применима, если  $K > 5,34$ ; при  $K < 5,34$  не требуется поперечных ребер жесткости. При пользовании формулой (6.59) нужно учитывать одно обстоятельство. Может оказаться, что расстояние  $a$  между ребрами взято слишком большим и нельзя подобрать соответствующее значение момента инерции. Поэтому, в случае, если

$$\left( \frac{K-5,34}{5,5/\alpha^2 - 0,6} \right)^3 > 1,$$

необходимо уменьшить расстояние между поперечными ребрами и найти новое значение  $J$  по формуле (6.59).

В упругопластической стадии критическое напряжение  $\tau_{кр}$  находят с помощью графика (см. рис. 6.6), а момент инерции поперечного ребра умножают на отношение  $\sigma_{i_{кр}}/\sigma_{i_{кр}}^*$  при  $\sigma_i = \sqrt{3}\tau$ .

Анализ устойчивости пластин стенок балок в упругой стадии при сложном напряженном состоянии [11] приводит к понятию граничной поверхности, которая определяет допустимую комбинацию напряжений в пластине. Уравнение граничной поверхности в общем случае:

$$f(\sigma/\sigma_0, \rho/\rho_0, \tau/\tau_0) = 0, \quad (6.60)$$

где  $\sigma, \rho, \tau$  — действующие (расчетные) напряжения, которые достигли критических значений;  $\sigma_0, \rho_0, \tau_0$  — критические напряжения, найденные в предположении независимого действия каждого из них.

Такой подход можно распространить на упругопластическую стадию, считая, что допущение ограниченных пластических деформаций мало скажется на форме граничной поверхности. Принимая,

что  $f$  — однородная функция степени  $\alpha$ , выражение для проверки устойчивости плоских пластин получает вид:

$$\left[ \left( \frac{\sigma}{\omega t \sigma_0}, \frac{\rho}{\omega t \rho_0}, \frac{\tau}{\omega_1 m_1 \tau_0} \right) \right]^{1/\alpha} \leq 1, \quad (6.61)$$

где  $\omega_i$  — коэффициенты, учитывающие особенности поведения пластин в упругопластической и закритической стадиях;  $m_i$  — коэффициенты условий работы.

При определении критических напряжений  $\sigma_0$ ,  $\rho_0$  и  $\tau_0$  нужно учитывать одно обстоятельство, связанное с использованием графиков (см. рис. 6.6). Если упругие критические напряжения  $\sigma_{кр}^*$  превышают предельные, указанные на оси абсцисс, то предельные значения  $\sigma_{кр}$  допускается увеличивать на  $\Delta\sigma_{кр}$  с учетом марки стали:

Марка стали . . . . .	16Д	15ХСНД	10ХСНД
$\Delta\sigma_{кр}$ , МПа . . . . .	$0,03114 (\sigma_{кр}^* - 400)$	$0,03572 (\sigma_{кр}^* - 550)$	$0,03677 (\sigma_{кр}^* - 600)$

В качестве примера рассмотрим расчет местной устойчивости стенки сплошной изгибаемой балки, имеющей только поперечные ребра, по формуле

$$\left[ \left( \frac{\sigma}{\omega \sigma_0} + \frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 + \left( \frac{\tau}{\omega_1 m_1 \tau_0} \right)^2 \right]^{1/2} \leq 1. \quad (6.62)$$

Здесь коэффициент  $\omega$  учитывает особенности развития пластических деформаций, связанные с градиентом напряжений, характеризуемых коэффициентом:

$$\alpha = (\sigma_{с\max} - \sigma) / \sigma_{с\max},$$

где  $\sigma_{с\max}$  — максимальные нормальные сжимающие напряжения в пластине от расчетной нагрузки;  $\sigma$  — нормальные сжимающие или растягивающие напряжения на противоположном крае пластины от той же нагрузки. Напряжения  $\sigma_{с\max}$  и  $\sigma$  принимаются со своими знаками.

Коэффициент  $\omega$  находится в зависимости от  $\alpha$ :

$\alpha$ . . . . .	4	3	2	1,5	1,0	0,5	1
$\omega$ . . . . .	1,4	1,3	1,2	1,15	1,1	1,05	1,0

Возможность закритической работы стенки под действием касательных напряжений учитывается коэффициентом  $\omega_1$ , что допустимо для автодорожных и пешеходных мостов. Вводимый при отношении высоты  $h$  стенки к толщине  $\delta$  более 100, этот коэффициент

$$\omega_1 = 1 + 0,5 [h / (200\delta) - 0,5].$$

Коэффициентом  $m_1 = 1,1$  отражаются относительно благоприятные условия работы стенки изгибаемой балки при потере ею устойчивости от действий касательных напряжений (образование диагонального поля растяжения в закритической стадии). Необходимо иметь в виду, что при построении графиков (см. рис. 6.6) введен коэффициент условий работы, учитывающий неблагоприятное влияние сварочных остаточных напряжений.

Изложенная форма расчета пластинчатых элементов на устойчивость обладает достаточной гибкостью и в ее рамках возможен учет различных факторов и особенностей поведения сжатых стальных пластин.

## 7. ОСОБЕННОСТИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ПРОЛЕТНЫХ СТРОЕНИЙ МОСТОВ

### 7.1. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПРИНЦИПЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Современные конструкции стальных пролетных строений железнодорожных и автодорожных мостов — сложные системы, и чтобы получить действительно эффективное сооружение, необходимо руководствоваться как новейшими методами расчета и проектирования, так и соответствующими нормами. Решить поставленные задачи в значительной степени можно на основе теоретико-конструктивных принципов проектирования, при этом в качестве общих рассматриваются три принципа: 1) совмещения функций с учетом пространственной работы; 2) компоновки пролетных строений с учетом пространственной работы; 3) устойчивой прочности в упругопластической стадии. Эти принципы устанавливают взаимосвязь между теорией расчета и конструктивными формами и определяют пути получения эффективных мостовых сооружений. Первый из них направлен на более полную реализацию несущей способности всех элементов системы, а также улучшение эксплуатационных и строительных качеств сооружения. Второй принцип позволяет рационально использовать особенности взаимодействия элементов пространственных конструкций. Третий принцип дает возможность в максимальной степени использовать прочностные свойства материала и снизить материалоемкость, при обеспечении надежности.

Для автодорожных мостов в развитие и дополнение общих принципов оказывается полезным рассматривать следующие частные принципы проектирования: 1) компоновки поперечного сечения с учетом пространственной работы; 2) учета взаимодействия с фундаментами; 3) учета продольных связей при кручении; 4) редуцирования сечений при пластических деформациях; 5) учета пространственной работы ортотропных плит проезжей части (как складчатых оболочек); 6) компоновки сжатых поясов коробчатых балок; 7) учета пластических деформаций.

Применительно к железнодорожным сквозным пролетным строениям с конструкцией проезжей части, включенной в совместную работу с главными фермами, используются следующие дополнительные принципы проектирования: 1) рационального расположения диафрагм, включающих в работу продольные балки (определение схемы диафрагм); 2) равнопрочности продольных балок и поясов

ферм, что позволяет найти оптимальное осевое усилие, передаваемое на продольные балки с поясов ферм; 3) включения конструкции проезжей части при монтаже, что позволяет отказаться от усилительных элементов; 4) учета пластических деформаций при расчете элементов. Реализация этих принципов проектирования возможна на основе теоретической базы с проведением одновременно соответствующих экспериментальных исследований. Такой базой служат деформационные критерии эксплуатационной способности, методы расчетов по ограниченным пластическим деформациям и автоматизированные методы пространственных расчетов.

## 7.2. ПРОЛЕТНЫЕ СТРОЕНИЯ СО СПЛОШНЫМИ БАЛКАМИ

Для сплошностенчатых пролетных строений мостов характерно неравномерное распределение нормальных напряжений по ширине поперечного сечения. Это обстоятельство в свое время вызвало много дискуссий. Традиционно степень участия горизонтальных листов в работе балок учитывали введением в их сечение 30—60 толщин листа. С другой стороны, иногда высказывались мнения о полном включении листов в сечении балок. Разрешить этот вопрос оказалось возможным с развитием методов пространственного расчета и привлечением теории упругости.

Экспериментальное подтверждение факта неравномерного распределения нормальных напряжений по ширине поперечного сечения можно показать на результатах испытаний виадука, построенного на международной магистрали Брюссель—Арлон в Бельгии [81]. Распределение нормальных напряжений в элементах поперечного сечения, расположенного в 3 м от опоры 5 (между опорами 4—5) при загрузке двух пролетов, длиной 151 и 80 м (рис. 7.1) и равномерном загрузке моста в поперечном направлении, свидетельствует, что значения нормальных напряжений в отдельных точках по ширине могут различаться в 2 раза и более. Аналогичные результаты получены при испытаниях стального вантового моста в г. Киеве.

Для расчета напряжений в поперечных сечениях пролетных строений эффективной оказывается теория плито-балочных конструкций.

Результаты расчета балки жесткости вантового моста в г. Киеве по программе автора МП-4 (рис. 7.2) показывают, что степень участия горизонтальных листов в совместной работе с балками существенно зависит от положения поперечного сечения по длине моста. Наибольшая неравномерность распределения напряжений наблюдается в местах крепления вант и в опорных сечениях. Изменение характера нормальных напряжений по длине пролета весьма сложно. В отдельных сечениях максимальные напряжения оказываются не под стенками, а по оси поперечного сечения. Следовательно, при компоновке поперечного сечения пролетного строения нужно учитывать два фактора, которые влияют

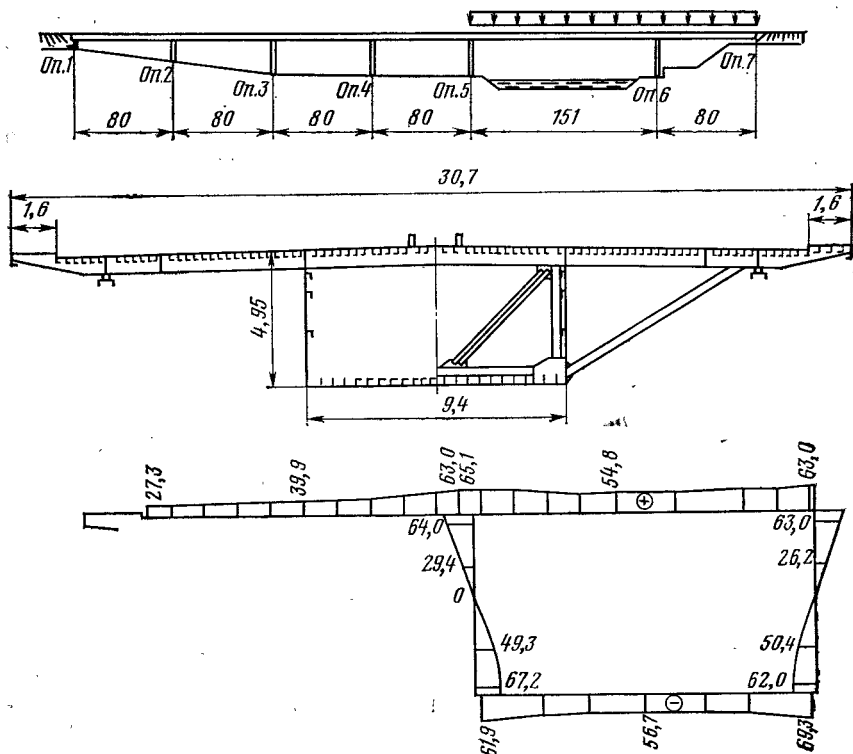


Рис. 7.1. Схема пролетного строения балочного виадука и эпюра нормальных напряжений на опоре б (в мегапаскалях)

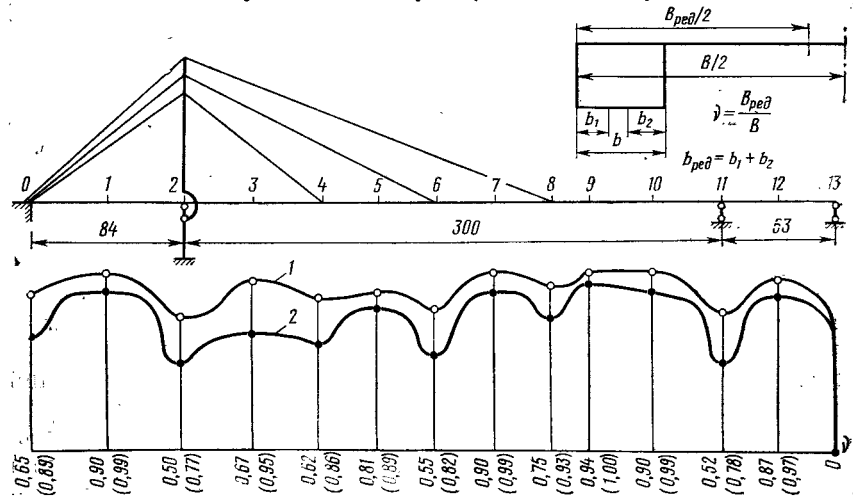


Рис. 7.2. Схема вантового моста и эпюры редукционных коэффициентов  $\chi$  для балки жесткости

1 — для нижней плиты; 2 — то же, для верхней



на выбор формы поперечного сечения — жесткость на кручение и неравномерность распределения нормальных напряжений по ширине сечения.

Характеристикой поперечного сечения на кручение, например, для тонкостенного стержня открытого профиля, служит величина  $\bar{K} = \sqrt{GJ_{\kappa}} / (EJ_{\omega})$ . Для оценки жесткости на кручение пролетного строения целесообразно ввести подобную величину. Жесткость, например, разрезного пролетного строения на кручение сечений открытого и полузамкнутого профилей зависит от обобщенной характеристики

$$J_{\kappa, об} = J_{\omega} + \frac{G}{E} \cdot \frac{l^3}{\pi^2} J_{\kappa}.$$

Одному и тому же значению обобщенной характеристики] соответствуют различные формы поперечного сечения с различным расстоянием между балками. Поэтому с этой точки зрения задача выбора типа поперечного сечения оказывается вариантной. Анализируя приведенные кривые (рис. 7.3) для двух типов поперечного сечения видим, что определенному значению  $K$  соответствует спектр поперечных сечений как открытого профиля  $\xi = 0$ , так и полузамкнутого, а также замкнутого (см. на рис. 7.3 штриховую кривую). Каждый тип поперечного сечения имеет свои расстояния между балками, что сказывается на характере распределения нормальных напряжений по ширине поперечного сечения. От расстояния между балками (точнее от отношения  $b/l$ ) зависит эффективная ширина пояса, включаемого в расчетное сечение. Чем больше расстояние между балками, тем больше значение бимоента инерции  $J_{\omega}$ , но при этом снижается эффективность использования материала поясов. Увеличение числа балок (стенок) в поперечном сечении ведет к более равномерному распределению напряжений по ширине, но в большинстве случаев прочность стенок оказывается недоиспользованной, что приводит к неоправдан-

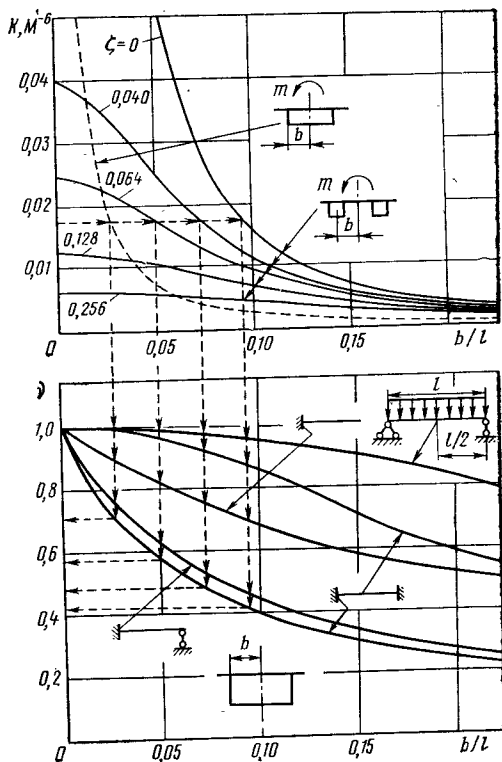


Рис. 7.3. Зависимости коэффициента  $k = 1/J_{\kappa, об}$  и коэффициента  $\nu$  полезной ширины пояса балки от отношения  $b/l$ . Безразмерная характеристика ( $\xi = (G/E) [J_{\kappa} / (\pi^2 l^2)]$ )

ному перерасходу материала. Для компоновки поперечного сечения пролетного строения целесообразна следующая методика.

За исходный критерий пространственной жесткости пролетного строения принимаем угол закручивания, например, в середине пролета. Наклон поперечного сечения пролетного строения вследствие кручения обычно составляет не более 0,5 — 1%. В некоторых странах, например в ФРГ, этот уклон нормируют и принимают не более 2%. Угол закручивания тоже определяет степень равномерной работы балок при эксцентричном приложении нагрузки. Следовательно, при заданном угле закручивания и длине пролета можно определить обобщенную характеристику поперечного сечения на кручение  $J_{\text{кр}}$ . Для разрезного пролетного строения открытого сечения, находящегося под действием равномерно распределенной крутящей нагрузки  $m_{\text{кр}}$ , имеем

$$J_{\text{кр}} = 1,27l^4 m_{\text{кр}} / (E\pi^4 \Phi),$$

где  $\Phi$  — допустимый угол закручивания.

Для реализации обобщенной характеристики выбираем тип поперечного сечения, при этом стремимся получить возможно большее значение  $v$ . На стадии вариантного проектирования можно пользоваться более простыми методами как для расчета на кручение, так и для определения полезной ширины плиты. В дальнейшем пролетное строение более детально анализируют с этих позиций и, в случае необходимости, вносят соответствующие коррективы.

Таким образом, принципы компоновки поперечного сечения с учетом пространственной работы получают аналитическое выражение и могут быть использованы для получения рациональных и эффективных конструкций.

При компоновке поперечного сечения коробчатых балок нужно также учитывать потерю устойчивости сжатой ребристой плиты, что отражается на жесткости поперечной балки. Момент инерции поперечной балки зависит от числа  $k$  продольных ребер, расстояния  $a$  между поперечными балками, расстояния  $B$  между стенками коробки:

$$J_{\text{пб}} = 0,2 (\kappa + 1) (B/a)^3 J, \quad (7.1)$$

где  $J$  — момент инерции продольного ребра.

В случае  $B/a > 1$  момент инерции  $J_{\text{пб}}$  может быть относительно большим и сечение поперечной балки потребуется значительное. Поэтому следует или уменьшать расстояние между стенками коробчатой балки, или же в зонах отрицательного изгибающего момента поставить поперечные связи, уменьшающие пролет поперечной балки.

Для различных схем опирания пролетных строений (рис. 7.4) можно дать значения р е д у к ц и о н н ы х коэффициентов  $\omega$  в предложении упругой работы стали (табл. 7.1): Коэффициенты определяют для каждого пластинчатого элемента верхнего и нижнего поясов, причем для консольных плит необходимо вводить

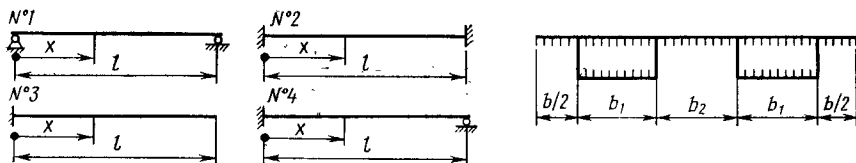


Рис. 7.4. Схемы опорания № 1÷4 и поперечное сечение коробчатой балки (см. табл. 7.1)

[83] множитель 0,85. Эффективную ширину каждой пластины получают, умножая ее геометрическую ширину на редуцирующий коэффициент этой пластины. С учетом этого вычисляют редуцированные геометрические характеристики всего поперечного сечения — площадь, момент инерции и т. д. Для статических расчетов системы нужно пользоваться редуцированными характеристиками, найденными в предположении упругой работы материала. В конструктивных расчетах сечений на прочность, как уже отмечалось, учитывают развитие пластических деформаций. В данном случае ограниченные пластические деформации позволяют повысить эффективность работы сечения, увеличивая при этом редуцирующие коэффициенты.

Для определения редуцированных коэффициентов в упруго-пластической стадии по их значениям для упругой стадии (см. табл. 7.1) вычисляют коэффициент

$$\alpha = \bar{\sigma}_{\min} / \bar{\sigma}_{\max} = 1,5\nu - 0,5,$$

где  $\bar{\sigma}_{\min}$ ,  $\bar{\sigma}_{\max}$  — напряжения в данной пластине в упругой стадии работы сечения.

Таблица 7.1

$\frac{b}{l}$		Значение редуцированного коэффициента $\nu$ для схем (см. рис. 7.4)										
		№ 1			№ 2			№ 3		№ 4		
		$x=0$	$x=0,25l$	$x=0,5l$	$x=0$	$x=0,25l$	$x=0,5l$	$x=0$	$x=l$	$x=0$	$x=0,25l$	$x=l$
0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
0,04	0,91	0,98	0,99	0,74	0,92	0,98	0,90	0,96	0,78	1,0	0,88	0,88
0,10	0,80	0,97	0,98	0,54	0,80	0,94	0,79	1,0	0,89	0,58	1,0	0,74
0,20	0,65	0,90	0,92	0,36	0,62	0,79	0,64	1,0	0,80	0,42	1,0	0,58
0,40	0,45	0,70	0,74	0,20	0,36	0,49	0,48	1,0	0,65	0,24	0,84	0,38
0,80	0,27	0,39	0,42	0,10	0,18	0,21	0,32	0,82	0,45	0,12	0,40	0,20
1,20	0,18	0,24	0,26	0,08	0,11	0,14	0,24	0,57	0,34	0,08	0,22	0,14
1,60	0,14	0,17	0,18	0,07	0,09	0,12	0,19	0,42	0,27	0,08	0,18	0,10
2,00	0,10	0,13	0,14	0,06	0,08	0,11	0,16	0,32	0,22	0,07	0,17	0,08

Редукционный коэффициент в упругопластической стадии

$$v_{пл} = 1 - \frac{2}{3} \kappa_r \left( 1 - \frac{\sigma_{min}}{\sigma_T} \right) \quad (7.2)$$

$$\text{при } \kappa_r = \left( \frac{\sigma_T - \sigma_{min}}{\sigma_T - \sigma_{min} + E \varepsilon_p} \right)^{1/2}, \quad \sigma_{min} =$$

$$= (\sigma_T + E \varepsilon_p) / \alpha \leq \sigma_T, \quad \sigma_{min} \geq \sigma_T, \quad \kappa_r = 0.$$

Для пластической деформации в размере 0,0006 значения «пластических» редукционных коэффициентов зависят от коэффициента  $\alpha$ , определяемого по «упругим» редукционным коэффициентам:

$\alpha$ . . . . .	0,7—1,0	0,50	0,33	0,25	0,2	0,10	0
$v_{пл}$ . . . . .	1,0	0,85	0,72	0,65	0,60	0,52	0,43

Таким образом, при конструктивных расчетах сечений на прочность каждую пластину верхнего и нижнего пояса коробчатого сечения нужно вводить в расчет с эффективной шириной  $b_{эпл} = v_{пл} b$ .

### 7.3. СЖАТЫЕ ПОЯСА КОРОБЧАТЫХ БАЛОК

Пояса стальных пролетных строений представляют собой ортотропную плиту, состоящую из листа, продольных и поперечных ребер. Такая конструкция входит в состав поперечного сечения пролетного строения и в предельном состоянии в ней можно допускать пластические деформации. При проектировании сжатого пояса нужно руководствоваться рядом принципов, которые отражают следующие вопросы: 1) назначение жесткости поперечной балки, обеспечивающей заданную свободную длину для расчета продольных ребер; 2) определение критических напряжений в продольных ребрах; 3) назначение размеров пластинчатых элементов пояса из условий местной устойчивости; 4) учет развития пластических деформаций в предельном состоянии.

На изгибную устойчивость сжатый пояс можно рассчитать по схеме анизотропной пластины (лист и продольные ребра), опирающиеся на упругие опоры (поперечные балки). Однако в этом случае получаются громоздкие выражения для упругопластической стадии.

Для определения жесткости поперечной балки без больших допущений сжатый пояс можно представить в виде стержневого набора (продольные ребра вместе с листом), опирающегося на упругие поперечные балки. Такая задача рассматривается в строительной механике корабля [23]. Используем это решение для определения жесткости поперечных балок.

Принимаем, что сжатый пояс состоит из  $k$  неразрезных продольных ребер, опертых на  $m$  опор, из них  $n$  промежуточных — поперечные балки, а крайние опоры — жесткие. Для заданного уровня

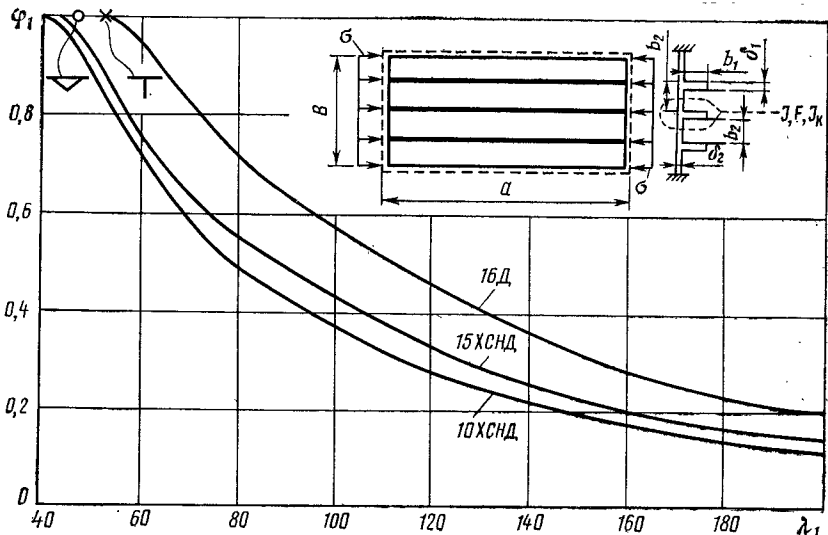


Рис. 7.5. Зависимость коэффициента  $\varphi_1$  продольного изгиба от гибкости  $\lambda_1$  для расчета на устойчивость сжатого пояса коробчатых балок. Кружочком и крестиком показаны экспериментальные точки

критических напряжений  $\sigma_{кр}$  в продольных ребрах необходимый момент инерции поперечных балок.

$$J_{пб} = J \left( \frac{\pi}{\mu} \right)^4 \left( \frac{B}{a} \right)^3 (\kappa + 1) \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_{кр}^*} \chi_{j \max}(\omega). \quad (7.3)$$

$$\text{при } \omega = \sigma_{кр} / \sigma_{кр}^{(0)}, \quad \sigma_{кр}^{(0)} = \pi^2 EJ / (Fl^2) (\sigma_{кр} / \sigma_{кр}^*),$$

где  $J$  — момент инерции одного продольного ребра вместе с участком листа, шириной  $b_2$  (рис. 7.5);  $\mu$  — коэффициент защемления поперечной балки;  $B$  — расстояние между стенками главных балок;  $a$  — расстояние между поперечными балками;  $\sigma_{кр}^*$  — критическое напряжение в предположении неограниченной упругости (определяется по  $\sigma_{кр}$ );  $\sigma_{кр}^{(0)}$  — критическое напряжение продольного ребра как шарнирно опертого стержня со свободной длиной  $a$ .

Коэффициент защемления  $\mu$  [23] можно определять в зависимости от коэффициента  $\chi = (1 + 2\zeta EJ/B)^{-1}$ , где  $\zeta$  — коэффициент податливости упругой заделки поперечных балок в стенках главной балки (поворот от единичного момента). Значения коэффициента защемления:

$\kappa$ . . . . .	0	0,25	0,50	0,75	1,0
$\mu$ . . . . .	3,14	3,32	3,58	3,97	4,73

Функция  $\chi_{j \max}$  зависит от числа промежуточных опор  $n$ . При коэффициенте  $\omega = 1$  потеря устойчивости продольных ребер происходит на длине между поперечными балками и функция

$$\chi_{j \max} = \frac{2}{\pi^2} \left( 1 + \cos \frac{\pi}{n+1} \right).$$

Таким образом, чтобы свободная длина продольных ребер не превышала шаг поперечных балок, их момент инерции при  $n=1$

$$J_{\text{пб}} \geq J\psi(\kappa+1)(B/a)^3(\sigma_{\text{кр}}/\sigma_{\text{кр}}^*). \quad (7.4)$$

Здесь  $\psi = 0,055$  при  $\kappa = 1$ ,  $\psi = 0,15$  при  $\kappa = 2$  и  $\psi = 0,20$  при  $\kappa \geq 3$ .

Такой поход целесообразен, если предусматривать полное использование расчетного сопротивления, т. е.  $\sigma_{\text{кр}} = R$ . В тех случаях, когда критические напряжения меньше расчетного сопротивления, можно допустить большую свободную длину для продольных ребер, а момент инерции поперечных балок определить по формуле (7.3); их размеры будут меньше, чем в случае  $\sigma_{\text{кр}} = R$ .

При известном размере свободной длины общую устойчивость ребристой плиты нужно проверять по выражению  $\sigma \leq \varphi_1 R$ , где  $\varphi_1$  — коэффициент, принимаемый по графику (см. рис. 7.5) в зависимости от гибкости:

$$\lambda_1 = a \left[ \frac{F}{J + b_2 \frac{\delta_2^3}{11} \left( 2\theta \frac{a^2}{B^2} + \frac{a^4}{B^4} \right)} \right]^{1/2} \quad \text{при } \theta = 1 + \frac{5,5J_{\text{к}}}{b_{20} \delta_2^3}, \quad (7.5)$$

где  $F$  — площадь сечения продольного ребра с участком листа шириной  $b_2$ ;  $J$  — момент инерции продольного ребра, с участком листа шириной  $b_2$ ;  $J_{\text{к}}$  — момент инерции продольного ребра при чистом кручении.

Кривые графика (см. рис. 7.5) построены с учетом начальных искривлений, сварочных напряжений, а также возможности перехода в упругопластическую стадию, в связи с чем использовано решение автора [51] для анизотропной пластинки.

По условиям местной устойчивости в зависимости от действующего напряжения  $\sigma$  пластинчатые элементы ребристой плиты должны удовлетворять требованиям с учетом ее размеров (см. схему на рис. 7.5) и марки стали:

Сталь 16Д									
$\sigma$ , МПа	.....	$cR$	190	180			<180		
$b_1/\delta_1$	.....	14	18,5	20			$266/\sqrt{\sigma}$		
$b_2/\delta_2$	.....	35	55,5	61			$816/\sqrt{\sigma}$		
Сталь 15ХСНД									
$\sigma$ , МПа	.....	$cR$	230	230	210	190	<190		
$b_1/\delta_1$	.....	12	14	15	16,5	18	19,5	$266/\sqrt{\sigma}$	
$b_2/\delta_2$	.....	30	36	41,5	47	52,5	59	$816/\sqrt{\sigma}$	
Сталь 10ХСНД									
$\sigma$ , МПа	.....	$cR$	320	290	270	250	230	210	<210
$b_1/\delta_1$	.....	11,5	13,5	15	15,5	16,5	17,5	18,5	$266/\sqrt{\sigma}$
$b_2/\delta_2$	.....	29	36	41	44,5	48,5	52	56	$816/\sqrt{\sigma}$

Уровень напряжений  $cR$  соответствует развитию пластических деформаций в размере 0,0006.

Зачемление пластинчатых элементов можно учитывать приведенными выше (см. п. 7.2) коэффициентами  $\alpha$  [7], на которые нужно умножать значения  $b/\delta$ . При наличии в элементе:

$$\left. \begin{aligned} \text{полосовых ребер (тип I)} \quad \alpha_1 &= 1 + \frac{2,93}{3\eta_1 + 4}; \\ \text{листа между ребрами (тип II)} \quad \alpha_2 &= 1 + \frac{0,96}{10\eta_2 + 3}, \end{aligned} \right\} (7.6)$$

$$\text{при } \eta_1 = \left( \frac{\delta_1}{\delta_2} \right)^3 \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{1}{1 - 0,106 (\delta_1/\delta_2)^2 (b_2/b_1)};$$

$$\eta_2 = 2 \left( \frac{\delta_2}{\delta_1} \right)^3 \frac{0,16 + 0,0056 (b_2/b_1)^2}{1 - 9,4 (\delta_2/\delta_1)^2 (b_1/b_2)^2}.$$

Если знаменатель в выражениях для  $\eta_{1,2}$  равен нулю или имеет отрицательное значение, то  $\alpha_{1,2} = 1$ .

Тавровые ребра центрально-сжатой плиты должны быть проведены также на общую и з г и б н о - к р у т и л ь н у ю устойчивость, имея

$$\lambda_{\text{IK}} = a \left[ \frac{J_p}{h^2 J_y + J_\omega + 0,04a^2 J_R} \right] \quad (7.7)$$

$$\text{при } J_p = J_y + J_z + F(h - e)^2, \quad J_\omega = \delta_n^3 b^3 / 144 + \delta_c^3 h^3 / 36, \quad J_R = \\ = (b\delta_n^3 + h\delta_c^3) / 3,$$

где  $J_y, J_z$  — моменты инерции соответственно относительно горизонтальной  $y$ , вертикальной  $z$  осей;  $F$  — площадь сечения ребра (причем в сечение включается только полка и стенка);  $h$  — высота стенки ребра (в осях);  $e$  — расстояние от срединной плоскости полки ребра до центра тяжести ребра;  $\delta_n, \delta_c$  — толщина полки и стенки;  $b$  — полная ширина пояса ребра.

По условиям местной устойчивости свесы пояса таврового ребра должны удовлетворять требованиям для полосовых ребер (тип I), а размеры стенки ребра при  $b > 0,3h$  — требованиям для листа между ребрами (тип II). В случае  $b \leq 0,3h$ , размеры стенки определяют по интерполяции между указанными типами элементов, при этом типу I соответствует  $b = 0$ , а типу II —  $b = 0,3h$ .

Коробчатые ребра пужно проверять только на общую изгибную устойчивость как указано выше, а по условиям местной устойчивости должны удовлетворять требованиям для листа между ребрами (тип II).

Изложенная методика применена при проектировании вантового моста в г. Киеве. В процессе передвижки балки жесткости были также выполнены расчеты, обеспечивающие безопасные условия монтажа.

Автором дан анализ двух зарубежных аварий с коробчатыми мостами [52], которым подтверждена приведенная методика расчета на устойчивость сжатых поясов коробчатых балок. Так, для моста через р. Дунай в г. Вене допустимый уровень напряжений по нашему расчету составляет 140 МПа, а при проектировании этого

моста допустимые напряжения по условиям устойчивости ребристой плиты были приняты в размере 177 МПа. Неучет начальных искривлений, сварочных напряжений, а также дополнительных напряжений от изменений температуры привел к аварии моста. При монтаже другого моста обрушилась коробчатая балка из-за потери устойчивости сжатой ребристой плиты, для которой допустимые напряжения по проекту были приняты в размере 240 МПа. По нашему методу для этого моста допускаемый уровень напряжений составляет 154 МПа. Сварочные остаточные напряжения и начальные искривления снизили критические напряжений соответственно на 25 МПа и 34 МПа.

Таким образом, предложенный автором метод расчета сжатых поясов коробчатых балок нужно признать достаточно надежным и эффективным.

#### 7.4. ОРТОТРОПНЫЕ ПЛИТЫ ПРОЕЗЖЕЙ ЧАСТИ

Прочность тонкостенных пространственных конструкций в подавляющем числе случаев тесно связана с явлением потери местной или общей устойчивости. Поэтому судить о прочности при развитии пластических деформаций можно только обеспечивая устойчивость.

Несущую способность стальных элементов целесообразно оценивать в таких случаях с позиций устойчивой прочности, когда, исходя из единого критерия пластической деформации, определяют значения допустимого усилия и геометрические параметры сечения, в частности, отношение ширины к толщине пластинчатых элементов. Необходимо подчеркнуть, что полное использование расчетного сопротивления в сжатых зонах сечения возможно лишь при обеспечении местной устойчивости пластинчатых элементов. Практически принцип устойчивой прочности для пространственных конструкций можно реализовать в два этапа. На первом этапе произвести упругий (упруго-пластический) расчет, из которого установить распределение деформаций и напряжений. На втором этапе для найденных абсолютных напряжений и деформаций, а также их градиентов определить надежные геометрические параметры сжатых пластинчатых элементов.

Покажем это на примере расчета ортотропной плиты, для которой одновременно выполним некоторые исследования ее пространственной работы.

Стальная плита проезжей части представляет собой ортотропную конструкцию и состоит из листа (настила) и подкрепляющих его продольных и поперечных балок (ребер). Поскольку работа плиты совместно с главными балками от общего изгиба рассмотрена ранее, остановимся на особенностях работы элементов плиты от местной нагрузки, т. е. от воздействия колес транспорта.

Сначала исследуем работу поперечных балок плиты совместно с листом. Для этого рассмотрим двухбалочное пролетное строение с расстоянием между стейками 6,20 м (проект Ленинградского моста). Поперечные балки высотой 0,35 м расположены друг от друга на расстоянии 1,75 м. Пролет поперечной



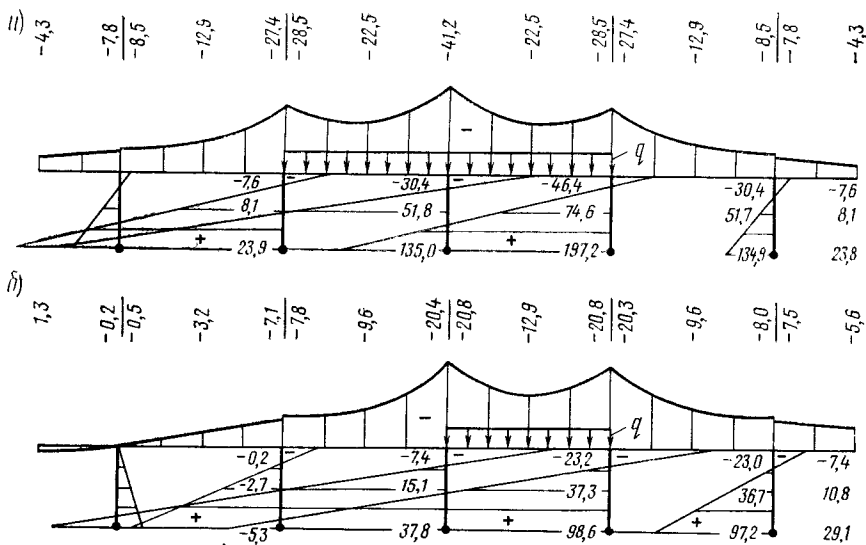


Рис. 7.6. Эпюры нормальных сил в элементах поперечной балки при равномерно распределенной нагрузке  $q$  (нормальные силы в килоньютонах на метр, сечение в середине пролета)

балки составляет 6,20 м. Толщина стенки 0,01 м, а площадь нижнего пояса 0,0016 м<sup>2</sup>. Продольные полосовые ребра расположены через 0,25 м. Площадь продольного ребра 0,00556 м<sup>2</sup>, момент инерции  $0,1974 \cdot 10^{-4}$  м<sup>4</sup>. Покрывающий лист имеет толщину 10 мм. Расчет выполняем по программе МП-4. Для расчета была взята конструкция, состоящая из пяти поперечных балок, шарнирно опертых на стенки главных балок. Рассмотрены три случая загрузки плиты проезжей части.

1. Распределенная нагрузка шириной 1 м поперек моста расположена на его длине 3,5 м симметрично относительно центра пролета поперечной балки. Такая нагрузка соответствует, например, гусеничной или колесной нагрузкам.

Из эпюры распределения нормальных сил в горизонтальном листе и элементах поперечной балки (рис. 7.6, а) видно характерное неравномерное распределение нормальных усилий в листе при его совместной работе с поперечной балкой. Эффективная ширина листа, включаемого в сечение поперечной балки, в середине ее к пролета в данном случае  $b_0 = 1,26$  м, а редуцированный коэффициент  $\nu = 0,72$  при расстоянии между поперечными балками 1,75 м.

2. Распределенная нагрузка действует на длине 1,75 б. Эпюра нормальных усилий в листе и поперечной балке (рис. 7.6, б) свидетельствует, что уменьшение длины загрузки приводит к росту степени неравномерности распределения нормальных усилий. Эффективная ширина листа, включаемого в сечение поперечной балки  $b_0 = 1,24$  м, а редуцированный коэффициент  $\nu = 0,71$ .

3. Сосредоточенная нагрузка  $P$  действует в середине пролета поперечной балки (рис. 7.7). Действие нагрузки вызывает значительные градиенты в распределении усилий. Эффективная ширина листа, включаемая в сечение поперечной балки  $b_0 = 0,86$  м, а редуцированный коэффициент составляет  $\nu = 0,49$  при расстоянии между поперечными балками в 1,75 м.

Для мостобалочных (поперечные балки) конструкций эффективная ширина листа, включаемая в сечение поперечной балки, не дает того же значения напряжения, если рассматривать изолированную балку, нагруженную заданными силами. Покажем это на примере загрузки распределенной нагрузкой

(см. случай 1). Будем считать, что в сечении поперечной балки включен лист, общей шириной 1,2 м (как принято в проекте). Нагрузку на поперечную балку соберем с ширины 1,75 м. Максимальный изгибающий момент в разрезной балке

$$M_{\max} = b \frac{ql_1}{8} (2l - l_1) = \frac{1 \cdot 1}{8} (2 \cdot 6,2 - 1) 1,75 = 24,94 \text{ кН} \cdot \text{м} ,$$

где  $l_1$  — ширина нагрузки, равная 1 м.

Момент инерции поперечной балки  $J = 27127,7 \text{ см}^4$ . Расстояния от нейтральной оси до верхней и нижней точек сечения соответственно  $z_{\text{в}} = 7,55 \text{ см}$  и  $z_{\text{н}} = 29,45 \text{ см}$ .

По приближенному расчету напряжение в верхней точке  $\sigma_{\text{в}} = 2,494 \times 10^5 \cdot 7,55 : 27127,7 = 6,941 \text{ МПа}$ . Программа МП-4 дает  $\sigma_{\text{в}} = 46,4 : 1 = 4,64 \text{ МПа}$ . По приближенному методу напряжение в нижней точке  $\sigma_{\text{н}} = 2,494 \times 10^5 \cdot 29,45 : 27127,7 = 27,07 \text{ МПа}$ . Программа МП-4 дает  $\sigma_{\text{н}} = 3,155 \cdot 10^3 : 16 = 19,72 \text{ МПа}$ .

Таким образом, вследствие того, что все поперечные балки связаны между собой, напряжения в них меньше, чем в изолированной балке с соответствующей редуцированной шириной листа. Метод редуцирования ширины листа приближенный и дает запас несущей способности. Поэтому при проектировании таких конструкций напряжения в поперечных балках нужно определять по пространственному методу.

Представляет интерес также работа продольных ребер плиты проезжей части. В зависимости от типа продольных ребер (открытых или замкнутых) имеют место особенности их работы.

Для оценки различных обстоятельств пространственной работы продольных ребер были рассчитаны по программе МП-4 плиты с тавровыми и коробчатыми ребрами (рис. 7.8). Тавровые ребра были получены из замкнутых путем разрезки последних внизу.

Сначала сравнивали работу плиты с замкнутыми и открытыми ребрами для гусеничной нагрузки  $q$  (рис. 7.9), которая по ширине поперечного сечения расположена над двумя коробчатыми ребрами. Анализ эпюр прогибов и нормальных сил показывает, что в

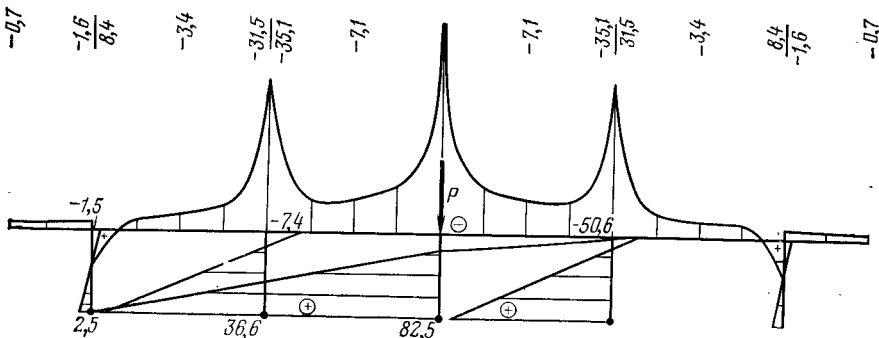


Рис. 7.7. Эпюры нормальных сил в элементах поперечной балки при сосредоточенной нагрузке  $P$  (нормальные силы в килоньютонах на метр, сечение в середине пролета)

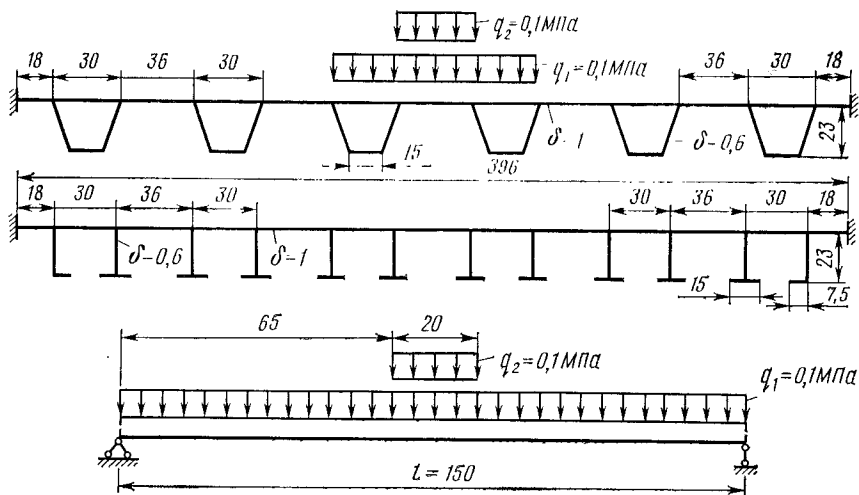


Рис. 7.8. Схемы к пространственному расчету ортотропной плиты (размеры в сантиметрах)

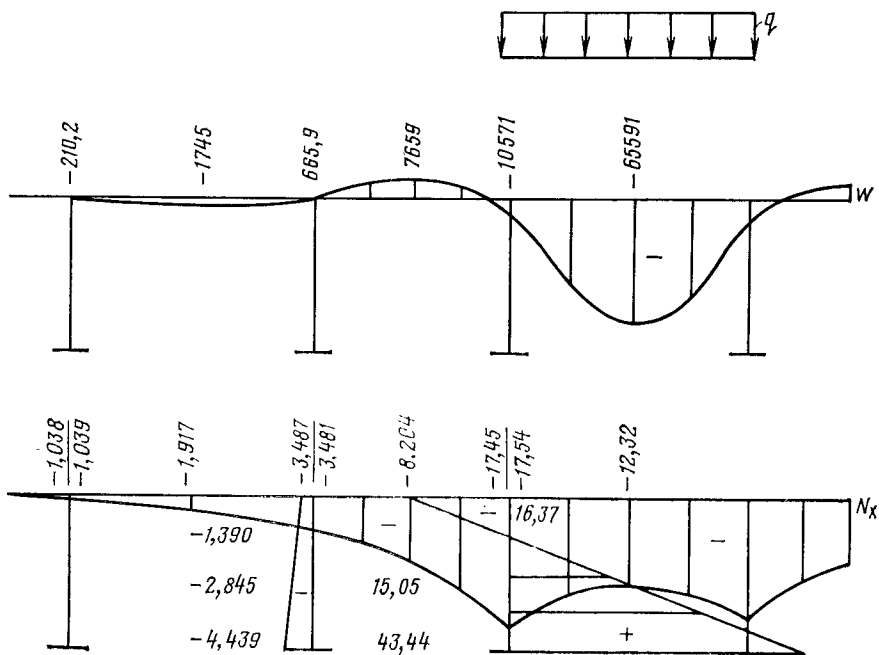


Рис. 7.9. Эпюры прогибов  $w$  и нормальных сил  $N_x$  в середине пролета для ортотропной плиты с тавровыми ребрами (прогибы в сантиметрах увеличены в  $E$  раз,  $E$  — модуль упругости, нормальные силы в ньютонах на миллиметр)

работе участвует ограниченное число ребер как замкнутого профиля, так и открытого. Максимальный прогиб в случае открытых ребер на 11% больше, чем для замкнутых, а максимальные нормальные силы больше соответственно на 17%. Моменты  $M_x$  и  $M_y$  несущественно отличаются для рассматриваемых типов ребер. Сравнение работы коробчатых и тавровых ребер плиты на гусеничную нагрузку показывает, что в обоих случаях она воспринимается ограниченным числом ребер, находящимся непосредственно под нагрузкой. Вследствие относительно большой гибкости контура поперечного сечения различие в работе между коробчатыми и тавровыми ребрами незначительно.

Работа элементов плиты на автомобильную нагрузку, занимающую поперек ширину 36 см и вдоль 20 см, характеризуется эпюрами прогибов и усилий (рис. 7.10), из которых видно, что максимальные прогибы в случае тавровых ребер больше, чем для коробчатых на 10%, а максимальные продольные силы соответственно больше на 23%. Для изгибающих моментов  $M_x$  и  $M_y$  различие несущественно, за исключением опорного момента слева от ребра: 367,8 Н · см/см для коробчатых ребер и 410,0 Н · см/см для тавровых.

В общем, закономерности работы плиты под автомобильной нагрузкой аналогичны рассмотренному выше случаю гусеничной

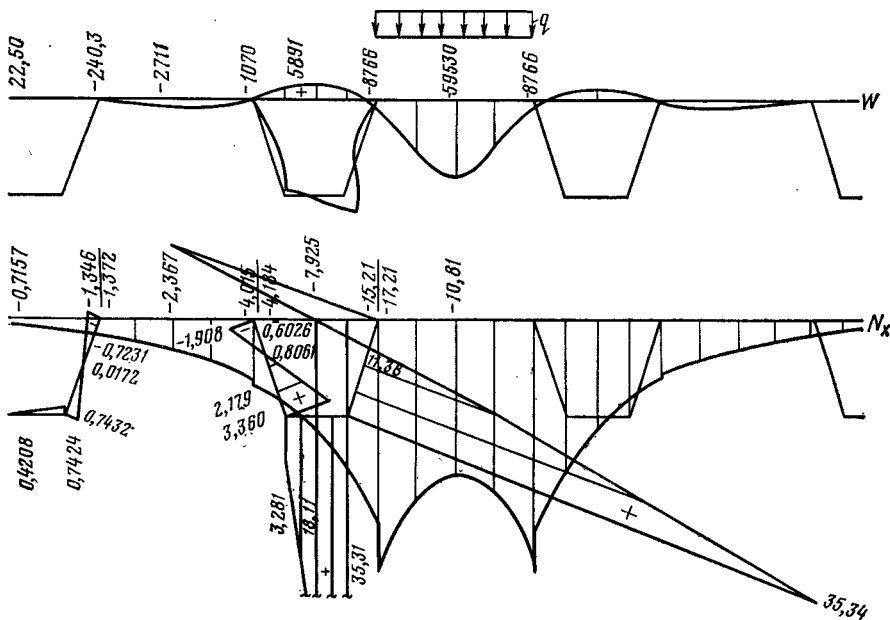


Рис. 7.10. Эпюры прогибов  $w$  и нормальных сил  $N_x$  в середине пролета для ортотропной плиты с коробчатыми ребрами (прогибы в сантиметрах увеличены в  $E$  раз,  $E$  — модуль упругости; нормальные силы в ньютонах на миллиметр)

нагрузки. Как общий вывод из сравнения работы коробчатых и тавровых ребер следует, что при обычно применяемых толщинах элементов плит деформативность контура поперечного сечения велика, вследствие чего резко снижается эффект коробчатых ребер. Поэтому методы расчета, основанные на игнорировании деформаций контура поперечного сечения ортотропной плиты, показывают завышающую (не в запас) способность коробчатых ребер распределять нагрузку. Такой вывод был получен автором еще в 1969 г. [47].

К полученным напряжениям (или деформациям) от местной нагрузки необходимо добавлять напряжения (или деформации), возникающие от совместной работы плиты в составе пролетного строения. Прочность ребер ортотропной плиты проверяют по формулам п. 5.2.

При проверке устойчивости пластинчатых элементов, составляющих ортотропную плиту, градиент напряжений характеризуется параметром

$$\xi = 1 - \sigma_{\min} / \sigma_{\max},$$

где  $\sigma_{\min}$  — минимальное сжимающее (или растягивающее со знаком минус) напряжение на кромке пластины;  $\sigma_{\max}$  — максимальное сжимающее напряжение в рассматриваемой пластинке.

Отношение ширины (или высоты) пластины к ее толщине  $b/\delta$  зависит от марки стали и величин  $\sigma_{\max}$  и  $\xi$ . Для стенок ребер отношения  $b/\delta$  будут следующими:

Параметр $\xi$ . . . . .	0	0,5	1,0	1,5	2,0
Сталь 16Д					
$b/\delta$ при $cR$ . . . . .	44	50	61,5	80,5	108
$\sigma_{\max} = 190$ МПа . . . . .	57,5	65,5	80,5	105	140
$\sigma_{\max} = 180$ МПа . . . . .	61	69,5	85	111	149
Сталь 15ХСНД					
$b/\delta$ при $cR$ . . . . .	38	43	53	69,5	93
$\sigma_{\max} = 270$ МПа . . . . .	42,5	48,5	59,5	78	104
$\sigma_{\max} = 250$ МПа . . . . .	46,5	53	65	85	114
$\sigma_{\max} = 230$ МПа . . . . .	50,5	57,5	70,5	92,5	123
$\sigma_{\max} = 210$ МПа . . . . .	54,5	62	76	100	133
$\sigma_{\max} = 190$ МПа . . . . .	59	67,5	82,5	108	145
Сталь 10ХСНД					
$b/\delta$ при $cR$ . . . . .	36	41	50,5	66	88
$\sigma_{\max} = 320$ МПа . . . . .	41	47	57,5	75	100
$\sigma_{\max} = 290$ МПа . . . . .	45	51,5	63	82,5	110
$\sigma_{\max} = 270$ МПа . . . . .	47,5	54	66,5	87	116
$\sigma_{\max} = 250$ МПа . . . . .	50,5	57,5	70,5	92,5	123
$\sigma_{\max} = 230$ МПа . . . . .	53	60,5	74	97	130
$\sigma_{\max} = 210$ МПа . . . . .	56	64	78,5	103	138

При более низких  $\sigma_{\max}$  для всех марок стали отношение  $b/\delta \leq \alpha / \sqrt{\sigma_{\max}}$ , где  $\alpha$  принимают равной 816, 930, 1138, 1493, 1999 для  $\xi$  равной соответственно 0; 0,5; 1,0; 1,5; 2,0.

Коэффициентом  $c$  учитывается степень развития пластических деформаций (см. п. 5.2).

Отношение  $b/\delta$  для полосовых ребер при тех же зависимостях будут иметь следующие значения:

Параметр $\xi$ . . . . .	0	0,5	0,75	1,0
Сталь 16Д				
$b/\delta$ при $cR$ . . . . .	14 (14)	14,5 (18,5)	15 (23)	15,5 (34)
$\sigma_{\max} = 190$ МПа	18,5 (18,5)	19,5 (24)	20 (30)	20 (45)
$\sigma_{\max} = 180$ МПа	20 (20)	20,5 (26)	21 (32,5)	21,5 (48,5)
Сталь 15ХСНД				
$b/\delta$ при $cR$ . . . . .	12 (12)	12,5 (15,5)	13 (19,5)	13 (29,5)
$\sigma_{\max} = 270$ МПа	14 (14)	14,5 (18,5)	15 (23)	15,5 (34)
$\sigma_{\max} = 250$ МПа	15 (15)	15,5 (19,5)	16 (24,5)	16,5 (37)
$\sigma_{\max} = 230$ МПа	16,5 (16,5)	17,5 (21,5)	17,5 (27)	18 (40,5)
$\sigma_{\max} = 210$ МПа	18 (18)	19 (23,5)	19 (29,5)	20 (44)
$\sigma_{\max} = 190$ МПа	19,5 (19,5)	20 (25)	20,5 (31,5)	21 (47)
Сталь 10ХСНД				
$b/\delta$ при $cR$ . . . . .	11,5 (11,5)	12 (15)	12,5 (19)	12,5 (28)
$\sigma_{\max} = 320$ МПа	13,5 (13,5)	14 (17,5)	14,5 (22)	15 (33)
$\sigma_{\max} = 290$ МПа	15 (15)	15,5 (19,5)	16 (24,5)	16,5 (37)
$\sigma_{\max} = 270$ МПа	15,5 (15,5)	16 (20)	16,5 (25)	17 (38)
$\sigma_{\max} = 250$ МПа	16,5 (16,5)	17,5 (21,5)	17,5 (27)	18 (40,5)
$\sigma_{\max} = 230$ МПа	17,5 (17,5)	18,5 (23)	18,5 (28,5)	19 (43)
$\sigma_{\max} = 210$ МПа	18,5 (18,5)	19 (24)	19,5 (30)	20 (45)

При более низких  $\sigma_{\max}$  для всех марок стали отношение  $b/\delta \leq \leq \alpha/\sqrt{\sigma_{\max}}$ , где  $\alpha$  принимают равной 266 (266), 278 (348), 285 (433), 291 (651) для  $\xi$  равной соответственно 0; 0,5; 0,75; 1,0.

В скобках даны величины для случая, когда максимальные сжимающие напряжения возникают на закрепленной продольной кромке.

Используя эти данные, можно обеспечить устойчивую прочность поперечного сечения пролетного строения, в состав которого входит как верхняя ортотропная плита, так и нижняя ребристая.

При проектировании необходимо рассматривать ряд сечений по длине пролетного строения в зонах положительных и отрицательных изгибающих моментов. Вантово-балочным системам характерна продольная сжимающая сила, которая для местной устойчивости — неблагоприятный фактор.

Таким образом, с учетом изложенного можно сформулировать некоторые положения для р е а л и з а ц и и принципа устойчивой прочности.

1. По условиям местной устойчивости при сжатии лист настила (между продольными ребрами), свесы поясов поперечных ребер ортотропных и ребристых плит, продольные полосовые ребра ребристых плит, стенки продольных коробчатых ребер ортотропных плит должны удовлетворять приведенным выше требованиям отношения  $b/\delta$  и марки стали.

2. Напряжения в сжатых пластинчатых элементах нужно вычислять с учетом местного действия нагрузки, при этом для узла пересечения продольных ребер ортотропной плиты с поперечной балкой по нижней фибре продольного ребра необходимо суммиро-

вать сжимающие напряжения от совместной работы с главными балками и напряжения от местного действия нагрузки.

3. Защемления пластинчатых элементов допускается учитывать путем умножения значений  $b/\delta$  на коэффициенты по формулам (7.6).

Градиент напряжений вдоль ребер плиты можно учитывать, определяя длину полуволны потери устойчивости пластинчатого элемента и принимая сжимающее напряжение равным среднему значению на этой длине. Для полосовых ребер длину полуволны пужно принимать равной 1,64 их высоты, а для тавровых ребер со свесом пояса более 0,3 высоты ребра — 0,7 высоты ребра.

### 7.5. ВЛИЯНИЕ ОСАДКИ ОПОР И ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ НА РАБОТУ НЕРАЗРЕЗНЫХ БАЛОК

Правильная оценка влияния осадки опор на работу неразрезных балок имеет важное значение и отражается на экономичности принимаемых конструктивных решений. Существенную роль здесь играют пластические свойства материала. Если материал балки обладает достаточной пластичностью, то осадки опор не оказывают сколько-нибудь заметного влияния на уменьшение предельной нагрузки. Объясняется это тем, что напряжения, вызываемые осадкой опор, являются собственными (внутренними) напряжениями, которые в предельном состоянии при развитии пластических деформаций в наиболее напряженных сечениях релаксируют, образуя пластические шарниры. Такое положение подтвердили опыты [54], проведенные еще в 1928—1929 гг. над стальными балками двутаврового сечения высотой 16 см и пролетами по 2,4 м.

Однако ограничиться только этим выводом для конструкций пролетных строений было бы неправильно, так как могут быть допущены только ограниченные пластические деформации и необходимо считаться с потерей устойчивости, в основном — местной.

В качестве примера рассмотрим поведение двухпролетной неразрезной балки с пролетами  $l$  при осадке промежуточной опоры на величину  $\Delta$ . Максимальный изгибающий момент, возникающий за счет осадки,  $M_{\Delta} = 3EJ\Delta/l^2$ . Для дополнительного напряжения в фибре можно получить  $\sigma_{\Delta} = 3EJ\Delta y_{\max}/l^2$ , где  $y_{\max}$  — расстояние от нейтральной оси до наиболее удаленного волокна (фибры).

Проведем вычисление напряжений для двух пролетов неразрезной балки при осадке опоры  $\Delta = 10$  см:

$$l = 18 \text{ м}, y_{\max} = 50 \text{ см}, \sigma_{\Delta} = 97,5 \text{ МПа};$$

$$l = 40 \text{ м}, y_{\max} = 100 \text{ см}, \sigma_{\Delta} = 39,4 \text{ МПа}.$$

Если балка изготовлена из стали с расчетным сопротивлением  $R = 290$  МПа, то увеличение напряжений сверх расчетного сопротивления для этих пролетов будет соответственно 33,6 и 13,6%. Для стали с расчетным сопротивлением  $R = 350$  МПа увеличение напряжений за счет осадки опоры составит 28 и 11,3%.

Из этих данных видно, что с увеличением пролета, а также расчетного сопротивления, относительное влияние осадки опоры на напряженное состояние неразрезной балки снижается. Все сказанное касается только упругой стадии работы балки.

Начальные напряжения от осадки опоры при нагружении балки вызывают более раннюю текучесть, однако можно полагать, что при пластической деформации 0,0025 несущая способность балки уже не будет зависеть от начального напряжения. Во всяком случае имеется возможность выполнить соответствующий упругопластический расчет с учетом начальных напряжений и найти перераспределение изгибающих моментов в неразрезной балке [47]. Особое внимание в данном случае нужно уделять обеспечению местной устойчивости пластинчатых элементов, составляющих поперечное сечение. Их размеры, а точнее отношение ширины к толщине, должны обеспечивать возможность соответствующей пластической деформации.

Таким образом, допуская работу отдельных сечений неразрезной балки в упругопластической стадии, можно обосновать применение балок в случаях, когда по тем или иным причинам имеют место осадки опор.

Возможен также другой путь — применение бистальных поперечных сечений балок. При этом для поясов балок рекомендуется высокопрочная сталь, а для стенок — обычная или повышенной прочности. Деформативность бистальных конструкций более высокая, что в известной мере сглаживает неблагоприятные эффекты от осадок опор.

За критерий несущей способности бистальных сечений принимают достижение предела текучести в одном из поясов, которые изготовлены из высокопрочной стали. В стенках балки наблюдаются пластические деформации, верхняя граница которых не должна превышать 0,0025. Практически пластическая деформация будет гораздо меньше. Ее значение определится как разность деформаций, соответствующих пределам текучести материала пояса и стенки.

Например, если пояс изготовлен из стали с расчетным сопротивлением  $R_{п} = 400$  МПа,  $\epsilon_{тп} = 10^{-3} \cdot 1,905$ , а стенка из стали с  $R_{ст} = 210$  МПа,  $\epsilon_{тст} = 10^{-3} \cdot 1$ , то по принятому для бистального сечения критерию получим  $\epsilon_{р} = 0,000905$ .

Расчет бистального сечения рассмотрим на примере изгиба коробчатой балки с симметричным сечением.

Высота упругой зоны в стенках

$$h_{упр} = \frac{\epsilon_{тст}}{\epsilon_{тп}} h_{\kappa} \kappa h.$$

Обозначим изгибающий момент, при котором наступает текучесть в стенке, через  $M_{г, ст}$ . Тогда несущая способность сечения определится выражением

$$M = c M_{гст} \text{ при } c = \left( 3 + 6 \frac{\sum F_{п}}{\sum F_{ст}} \cdot \frac{R_{п}}{R_{ст}} - \kappa^2 \right) \left( 2 + 6 \frac{\sum F_{п}}{\sum F_{ст}} \right)^{-1}, \quad (7.8)$$



где  $\Sigma F_{\Pi}$ ,  $\Sigma F_{\text{СТ}}$  — суммарная площадь соответственно полок и стенок коробчатого поперечного сечения.

Например, если пояса коробчатой балки изготовлены из стали класса С50 с расчетным сопротивлением  $R_{\Pi} = 400$  МПа, а стенки ее изготовлены из стали класса С 35 с расчетным сопротивлением  $R_{\text{СТ}} = 290$  МПа, то пределы текучести по деформациям соответственно будут  $\epsilon_{\Pi} = 10^{-3} \cdot 1,905$ , и  $\epsilon_{\text{СТ}} = 10^{-3} \cdot 1,38$ . Характеристика поперечного сечения  $\Sigma F_{\Pi} / \Sigma F_{\text{СТ}} = 3$ .

Коэффициент  $k = 1,38 : 1,905 = 0,725$ , а из выражения (7.8) коэффициент  $c = (3 + 6 \cdot 3 \cdot 1,38 - 0,525) : (2 + 6 \cdot 3) = 1,4$ . Максимальное значение пластической деформации  $\epsilon_p = 10^{-3} (1,905 - 1,38) = 0,000515$ .

Таким образом, применение бистальных сечений в неразрезных балках, получающих осадки, вполне целесообразно. Необходимо при этом помнить, что дополнительные напряжения от осадок должны восприниматься в основном высокопрочными поясами, работа которых допускается только в упругой стадии.

Рассмотрим влияние остаточных напряжений в упругопластической стадии для прямоугольного сечения, по высоте которого распределены заданным образом самоуравновешенные внутренние напряжения (рис. 7.11). Максимальные остаточные напряжения будем характеризовать коэффициентом  $\psi = \sigma_{\text{ост}} / \sigma_T$ . Закон изменения относительных деформаций, вызванных внутренними напряжениями, тот же что и для напряжений, а сами деформации  $\epsilon_{\text{ост}}^{(y)} = \sigma_{\text{ост}} / E$ . Присутствие внутренних напряжений приводит к более раннему появлению текучести в точках сечения, при этом для деформаций соблюдается принцип их алгебраического сложения. При заданной расчетной ограниченной пластической деформации, остаточные напряжения в сечении приведут к фактической большей пластической деформации на величину  $\epsilon_{\text{остmax}}^{(y)}$ .

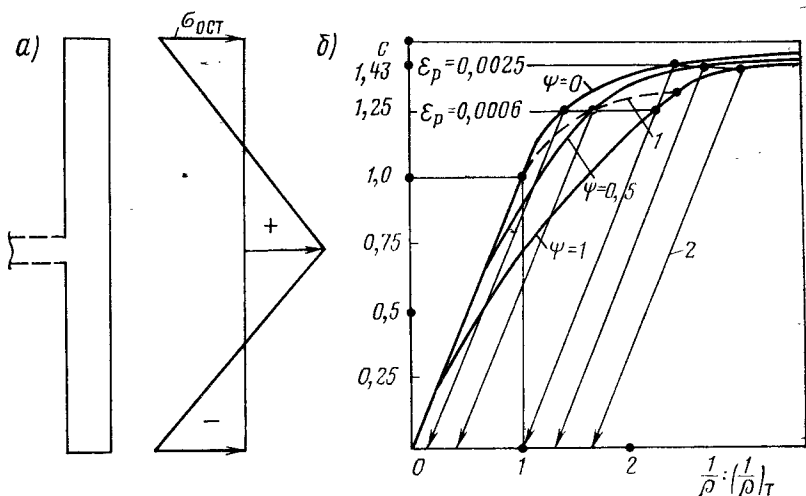


Рис. 7.11. Эпюры и график к учету остаточных напряжений:

1 — односторонняя текучесть; 2 — разгрузка

Для оценки влияния остаточных напряжений на жесткость сечения или кривизну необходимо получить соответствующие выражения. Надо различать три стадии работы сечения под действием возрастающей нагрузки.

Первая стадия характеризуется упругой работой материала в сечении и напряженное состояние его определяется суммированием остаточных напряжений с напряжениями от внешних сил. Для этой стадии соблюдается условие  $\sigma_{\max} \leq \sigma_T$ . Максимальное значение кривизны в первой стадии  $(1/\rho)_T = \epsilon_T/h$ . Для второй стадии характерна односторонняя текучесть и кривизна [78]:

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)_2 = \frac{\epsilon_T}{h} \left[ \frac{4(\psi+1)^3}{(3+\psi-\alpha)^2} - 2\psi \right] \text{ при } \alpha = \frac{M_{пл}}{M_T}. \quad (7.9)$$

Односторонняя текучесть имеет место вплоть до значения параметра

$$\bar{\alpha} = \bar{M}_{пл}/M_T = (1+3\psi)/(1+2\psi).$$

Максимальная кривизна во второй стадии

$$(1/\rho)_2 = (\epsilon_T/h) [1 + 2\psi - \psi/(1+\psi)].$$

Таким образом, параметры  $\bar{\alpha}$  и  $(1/\rho)_2$  характеризуют граничное состояние между односторонней и двусторонней текучестью.

Третья стадия работы сечения при наличии остаточных напряжений характеризуется развитием текучести с двух сторон. Для этой стадии кривизна

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)_3 = \frac{\epsilon_T}{h} \left[ 4\psi^2 + \frac{1}{\psi^2(3-2\alpha)^2 + (3-2\alpha)} \right]^{1/2}. \quad (7.10)$$

При  $\alpha \rightarrow 1,5$ , т. е. при пластическом шарнире для прямоугольного сечения, кривизна неограниченно возрастает.

Оценим влияние остаточных напряжений на кривизну для трех параметров:  $\psi = 0$ ,  $\psi = 0,5$  и  $\psi = 1$ . Анализ соответствующих зависимостей (см. рис. 7.11) показывает, что при остаточных напряжениях в размере 50% от предела текучести максимальное увеличение составляет 15—20% по сравнению со случаем отсутствия остаточных напряжений, что соответствует допущению расчетных пластических деформаций в размере 0,0006.

При допускаемой пластической деформации в размере 0,0025 влияния остаточных напряжений  $\sigma_{ост} = 0,5\sigma_T$  практически не ощущается.

Если максимальные остаточные напряжения достигают предела текучести, они заметно сказываются на увеличении кривизны на начальных этапах развития пластичности (на 30—40%). Однако, уже при нагрузке, соответствующей расчетному развитию пластичности в размере 0,0025, это увеличение незначительно при  $R = 320$  МПа.

Рассмотренный случай прямоугольного сечения с весьма неблагоприятной эпюрой остаточных напряжений четко отражает существо влияния этих напряжений на несущую способность конструкции по прочности и жесткости. Он свидетельствует также о практической возможности учета остаточных напряжений, но в то же время указывает на возможность их игнорирования при  $\sigma_{ост} < 0,5\sigma_T$  в расчетах на прочность и жесткость.

## 7.6. ПРОЛЕТНЫЕ СТРОЕНИЯ СО СКВОЗНЫМИ ФЕРМАМИ

Степень включения продольных балок в совместную работу с фермами зависит от размеров диафрагм сквозных железнодорожных пролетных строений. Для анализа этого явления рассмотрим случай объединения поясов ферм и продольных балок некоторой сплошной пластиной, работающей только на сдвиг (рис. 7.12, а). По существу здесь используется принцип замены дискретных связей энергетически эквивалентной пластиной. Зависимость осевой силы  $N_2$  в продольной балке от мощности диафрагм для пролетного строения 66 м с ездой поверху (рис. 7.12, б) показывает, что балки включаются в работу довольно быстро, а увеличение площади диагонали диафрагм до 0,1 от площади пояса фермы дает практически максимальную осевую силу в продольной балке, т. е. общая сила  $N$  в изолированной ферме распределяется пропорционально площадям пояса фермы и балки. Так решается задача передачи сил с поясов фермы на конструкцию проезжей части. Однако при этом остается открытым вопрос о целесообразном значении осевой силы, которую нужно передать на продольную балку.

Следовательно, задача рациональной компоновки схем диафрагм двойственна. С одной стороны, с позиций жесткости целесообразно максимальное включение балок, а с другой, значение осевой силы определяется условиями прочности продольной балки, работающей на растяжение (сжатие) и изгиб. Используя условие равнопроч-

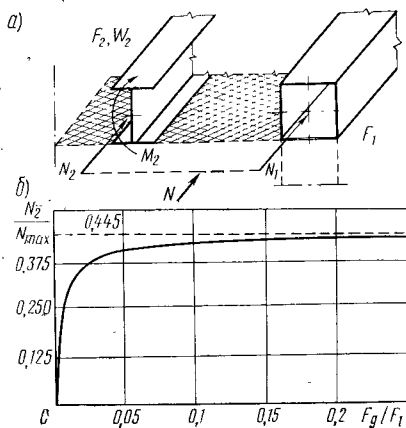
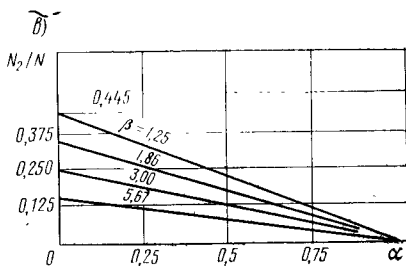


Рис. 7.12. Схема и графики к расчету включения продольных балок в совместную работу с фермами



ности пояса фермы и продольной балки, получим значение осевой силы в продольной балке:

$$N_2 = N(1 - \alpha) / (1 + \beta) \quad (7.11)$$

$$\text{при } \alpha = M_2 / (W_2 c_2) F_1 \varphi_1 / (N k_{н1}), \quad \beta = (F_1 \& F_2) (\varphi_1 / k_{н1}),$$

где  $M_2$  — изгибающий момент в продольной балке;  $c_2$  — коэффициент, учитывающий развитие пластичности в продольной балке;  $\varphi_1$  — коэффициент продольного изгиба для пояса фермы (только для случая сжатия);  $k_{н1}$  — коэффициент надежности для поясов фермы, равный 1,2 для сжатых и 1,1 для растянутых поясов. Остальные обозначения см. на рис. 7.12.

При отсутствии изгибающего момента в продольной балке осевая сила, которую целесообразно передать на нее,

$$N'_2 = N [1 + (F_1 / F_2) (\varphi_1 / k_{н1})]^{-1}. \quad (7.12)$$

В действительности продольная балка всегда нагружена изгибающим моментом, вследствие чего осевая сила в ней должна быть несколько уменьшена. При полном использовании несущей способности продольной балки на изгиб ( $\alpha = 1$ ) на нее нельзя передавать продольную силу. В практических расчетах  $\alpha < 1$ .

Таковы аналитические принципы проектирования сквозных конструкций при включении конструкции проезжей части в совместную работу с главными фермами.

Последовательность проектирования для этого может быть рекомендована следующая. По величине  $\alpha$  и заданном  $\beta$  найти отношение  $N_2/N$  исходя из условий равнопрочности (см. рис. 7.12, в). Затем по значению  $N_2/N$  определить сечение диафрагм (см. рис. 7.12, б).

Новейшие достижения в области возведения стальных конструкций мостов позволили разработать неразрезные пролетные строения с ездой понизу, в которых конструкция проезжей части включена в совместную работу с главными фермами. Эти достижения относятся как к материалам и соединениям, так и к теории расчета и проектирования.

По методике, разработанной автором, были рассчитаны такие пролетные строения, запроектированные Гипротрансмостом сварными из низколегированных сталей. Вначале были намечены схемы расположения диафрагм, которые обеспечивали совместную работу продольных балок и нижних поясов ферм. В результате предварительных проектных разработок оказалось, что в данных конструкциях требуется постановка диафрагм в значительном числе панелей для обеспечения включения продольных балок в совместную работу. Схемы расположения диафрагм, предложенные автором и принятые в проекте, даны для одного пролетного строения на рис. 7.13.

Далее варьировали высоту пролетных строений. По условиям унификации целесообразно было сохранить высоту ферм 15 м во всех пролетах. Известно, что применение более прочных сталей часто лимитируется условиями жесткости. В данном случае включение конструкции проезжей части в совместную работу с главными

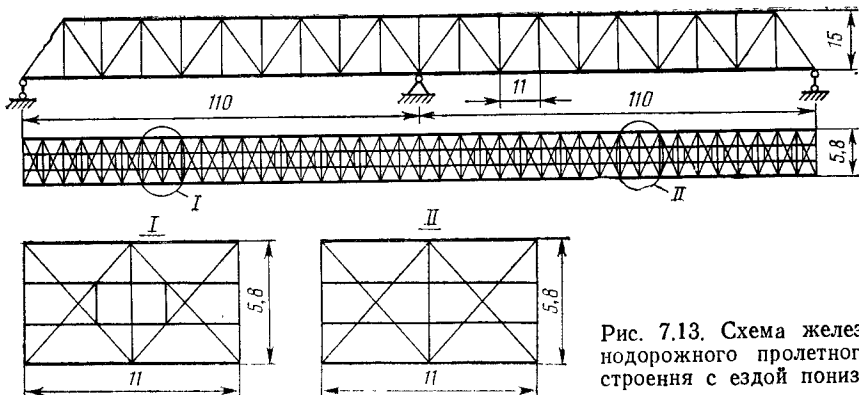


Рис. 7.13. Схема железнодорожного пролетного строения с ездой понизу

ми фермами позволило повысить жесткость примерно на 5—10%. Анализ результатов по семи вариантам пролетного строения (табл. 7.2) показывает, что сварные пролетные строения легче клепанных на 10—12%. Увеличение высоты ферм с 15 до 18 м в пролетных строениях  $2 \times 132$  м и  $132 + 154 + 132$  м практически не приводит к снижению расхода металла, так как облегчаются пояса, но утяжеляются раскосы, стойки и подвески. Уменьшение высоты ферм в пролетном строении  $2 \times 110$  м с 15 до 12,5 м не дает существен-

Таблица 7.2

№ варианта	Схема пролетов и высота фермы	$\frac{\omega}{l}$	Расход металла, т, на конструкции		
			сварные		клепанные
			15ХСНД	10ХСНД + 15ХСНД	
1	$2 \times 110$ м, $H = 15$ м	$\frac{1}{860}$	870	—	993
2	$2 \times 132$ м, $H = 15$ м	$\frac{1}{860}$	1250	677 + 463	1410
3	$110 + 132 + 110$ м, $H = 15$ м	$\frac{1}{835}$	1465	831 + 585	1718
4	$132 + 154 + 132$ м, $H = 15$ м	$\frac{1^*}{615}$	2056	1015 + 870	2310
5	$2 \times 110$ м, $H = 12,5$ м (панель 9,16 м)	—	869	—	985
6	$2 \times 132$ м, $H = 18$ м	—	1245	681 + 466	1417
7	$132 + 154 + 132$ м, $H = 18$ м	—	2067	1023 + 917	2345

\* Для пролета 154 м при загрузении (в крайнем пролете при загрузении  $-\omega/l = 1/675$ ).

ного эффекта. Применение неразрезного пролетного строения  $2 \times 110$  м взамен двух разрезных позволит снизить расходы металла на 6% без учета металла соединительных элементов и на 10% — при учете этих элементов. Применение низколегированных термоупрочненных сталей дает снижение их расхода на 8—9%.

Таким образом, результаты научных и проектных исследований позволили разработать новые пролетные строения, обладающие более высокими технико-экономическими показателями. Отличительная особенность этих пролетных строений — их преимущества при монтаже, так как можно отказаться от усиления элементов фермы (например, нижних поясов) за счет включения продольных балок проезжей части в работу ферм.

Результаты расчетов по программе СК для заключительной стадии монтажа пролетного строения  $2 \times 110$  м можно видеть на рис. 7.14. Постановка четырех диафрагм обеспечила разгрузку нижних поясов ферм над промежуточной опорой, что позволило отказаться от усиления некоторых элементов ферм.

Такие пролетные строения находят широкое применение при строительстве больших мостов на БАМе. Методика расчета и принципы включения конструкции проезжей части в совместную работу с главными фермами были использованы при проектировании совмещенных мостов через каньон (рис. 7.15) в нашей стране, а также

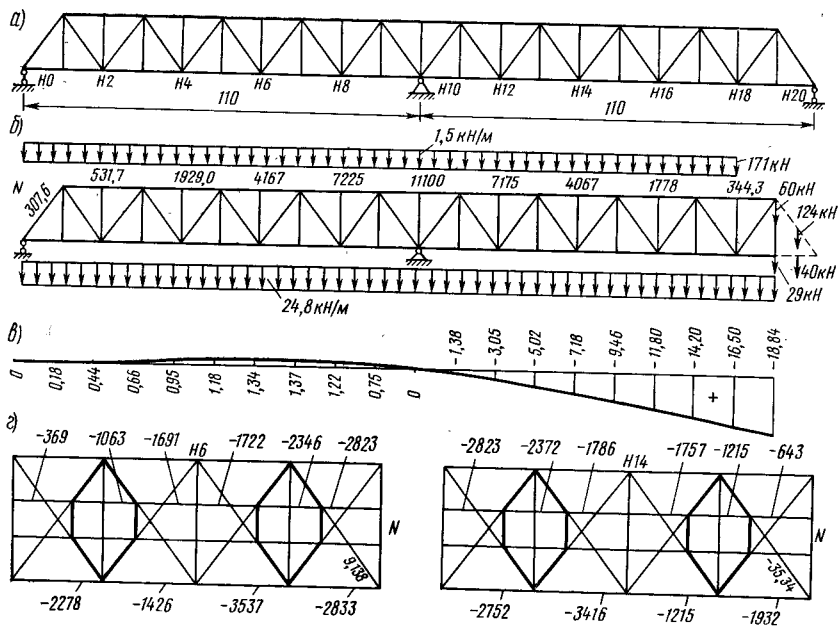


Рис. 7.14. Схемы и эпюры по расчету включения конструкции проезжей части на стадии монтажа:

а — схема фермы; б — нагрузка (в килоньютонах); в — эпюра прогибов (в сантиметрах); г — усилия в диафрагмах (в килоньютонах)

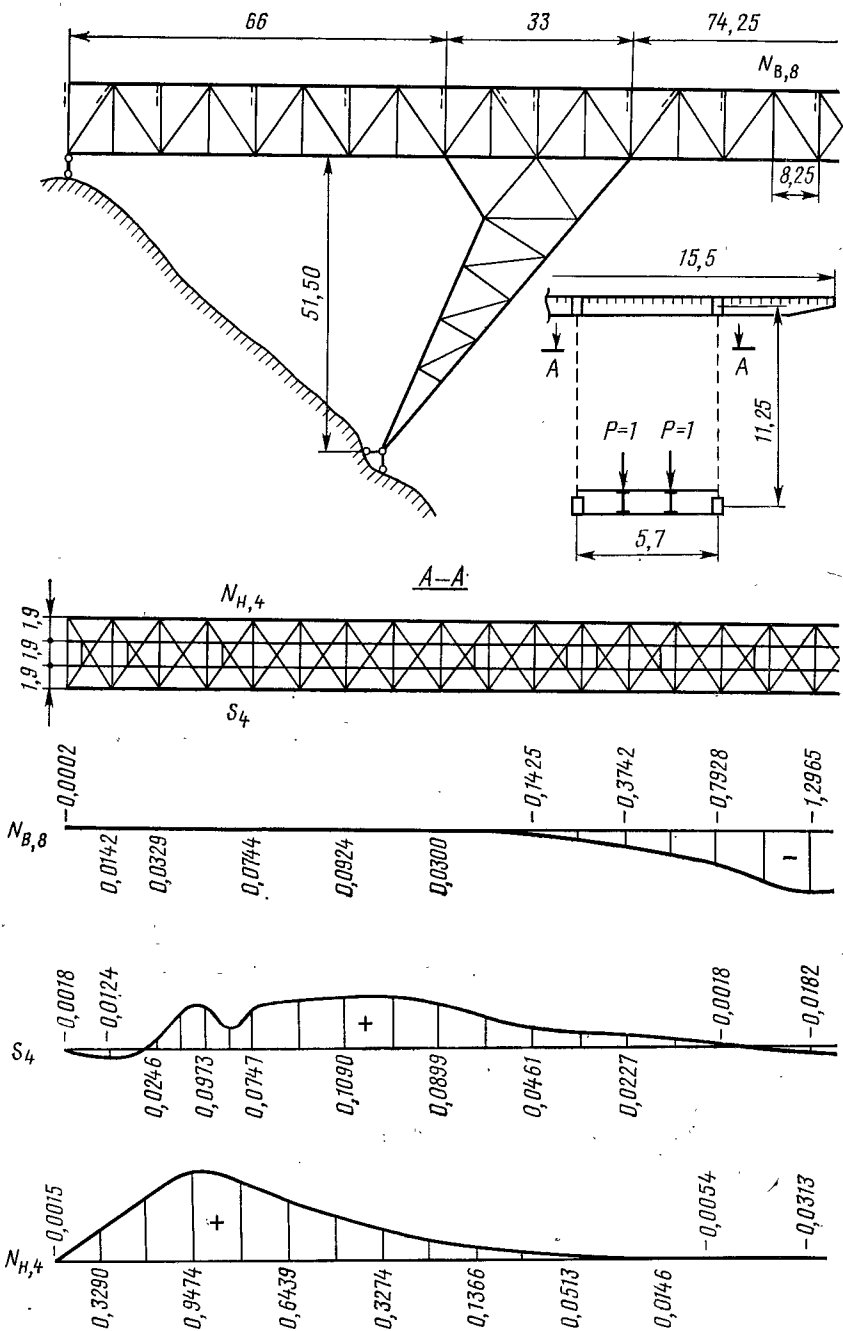


Рис. 7.15. Схема совмещенного моста и линии влияния усилий в его элементах

через р. Красную во Вьетнаме. Проектирование этих сооружений, выполненное Гипротрансмостом, основывалось на расчетах, проведенных по программе СК, разработанной автором.

При проектировании моста через каньон предварительно была выбрана схема расположения диафрагм, обеспечивающих включение конструкции проезжей части (под железную дорогу) в совместную работу с фермами. Поскольку в сечении верхних поясов ферм включена ортотропная плита автомобильного проезда, по программе МП-4 была определена эффективная ее ширина. Взаимодействие пролетного строения с конструкцией наклонных металлических опор учтено по блочному принципу (разделение на блоки) с последующим введением в узлы реакций опор.

Таким образом, впервые были рассчитаны и запроектированы неразрезные сквозные пролетные строения с конструкцией проезжей части, включенной в совместную работу с главными фермами, что оказывается эффективным не только для рассмотренных примеров, но и для уникальных совмещенных мостов.

Местные условия горных участков линии БАМа вызвали необходимость применения пролетных строений с ездой поверху, обеспечивающих боковой завоз элементов по временным автомобильным дорогам и навесной монтаж. Этим требованиям отвечают сквозные железнодорожные пролетные строения.

Ввиду того что старые такие конструкции неудовлетворительны по эксплуатационным показателям, так как этажная конструкция проезжей части быстро расстраивается, Гипротрансмост запроектировал новые пролетные строения с ездой поверху и проезжей частью, включенной в совместную работу с главными фермами. Проектной организацией были приняты схемы расстановки диафрагм, предложенные автором, который выполнил соответствующие расчеты по программе СК на ЭВМ БЭСМ-4.

При проектировании рассмотрены варианты пролетных строений: 1) разрезные с пролетами 44 и 55 м с высотой главных ферм 6 м; для пролета 55 м рассмотрен также вариант со скошенным концом (рис. 7.16,а); 2) разрезные с пролетами 55 и 66 м и высотой главных ферм 8,5 м; для пролета 66 м рассмотрен вариант со скошенным концом (рис. 7.16,б); 3) неразрезные с пролетами  $2 \times 55$  и  $2 \times 66$  м и высотой ферм главных 6 м (рис. 7.16, в).

Центральным вопросом проектирования было установление оптимальной схемы расстановки и конструкции диафрагм, обеспечивающих включение конструкции проезжей части в совместную работу с главными фермами (рис. 7.17). Рассмотрены следующие варианты схем расстановки диафрагм, подтвержденные расчетами на ЭВМ и конструкторскими разработками.

1. Диафрагмы с короткой распоркой и короткой диагональю, поставленные почти во всех основных и дополнительных узлах. В этом случае с поясов снимается и передается на продольные балки более 50% усилий. Вариант был отклонен из-за практической не-



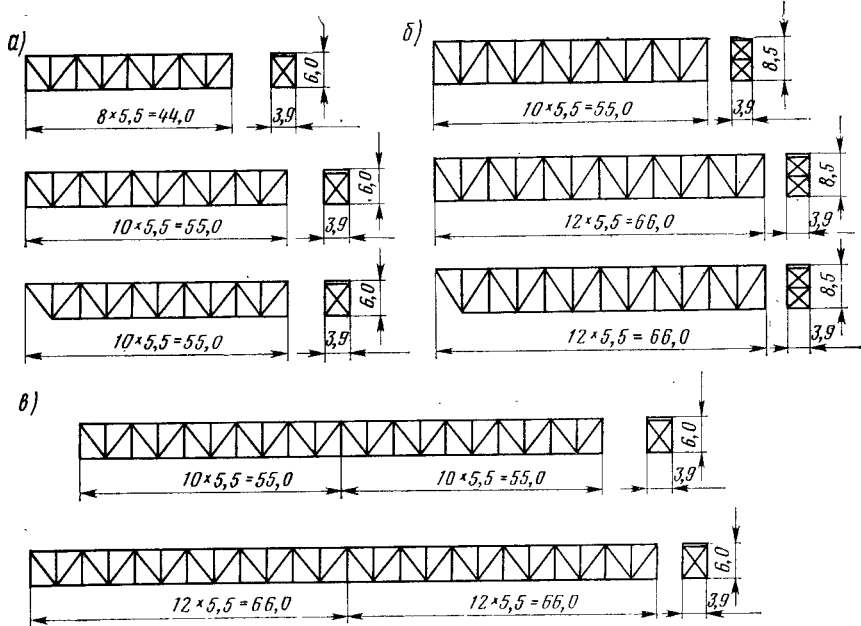


Рис. 7.16. Варианты пролетных строений с ездой поверху

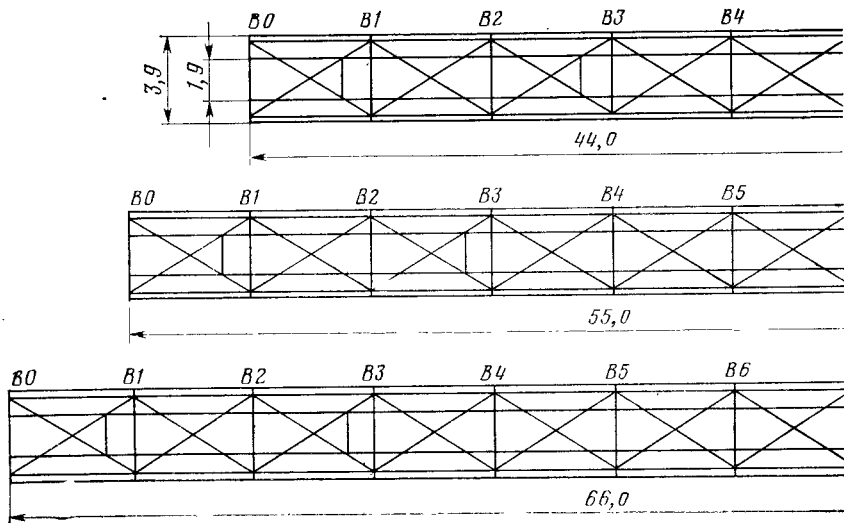


Рис. 7.17. Схемы расположения диафрагм в пролетных строениях с ездой поверху

возможности размещения прикреплений элементов диафрагм в основных узлах ферм.

2. Во втором варианте были исключены диафрагмы в зоне основных узлов ферм. Расчеты показали, что и в этом случае слишком большие осевые силы передаются на продольные балки. Сечение продольных балок значительно увеличивается, возникают трудности с получением удовлетворительного сопряжения продольных балок с поперечными.

3. В третьем и последующих вариантах исключали диафрагмы, в основном, в средней части пролетов. Путем серии расчетов на ЭВМ и конструкторских разработок были получены оптимальные схемы расположения диафрагм как в разрезных, так и неразрезных системах.

4. Для всех вариантов рассматривали схемы с постановкой двух коротких распорок в панели диафрагм, а также возможность устройства сплошного листа, соединяющего пояса ферм с продольными балками. Постановка второй короткой распорки в принципе возможна, но образующаяся при этом короткая диагональ работает на сжатие, что нерационально по устойчивости (малые значения коэффициентов  $\varphi$  — до 0,38 для сжатых элементов).

Из-за трудностей размещения прикреплений диагоналей диафрагм в промежутке между верхним поясом и продольной балкой, расстояние между которыми около 1 м на первых этапах рассматривали вариант со сплошным листом.

В итоге получены схемы диафрагм, которые обеспечивают уменьшение осевой силы в элементах верхнего пояса фермы на 30—45% по сравнению с расчетом изолированной плоской фермы. Сами диафрагмы ориентированы так, чтобы при общей работе пролетного строения на сжатие верхних поясов короткая диагональ и распорка работали на растяжение.

Показатели рассмотренных вариантов пролетных строений свидетельствуют следующее (табл. 7.3). Расход стали по вариантам 2 и 4 одинаковый и, следовательно, более рационален вариант с высотой ферм 6 м. При этом высота ферм 6 м для пролета 44 м принята из условия использования одних и тех же накладных кондукторов при изготовлении на заводе. Для пролетного строения 66 м необходима высота 8,5 м, так как при высоте 6 м не обеспечивается норма прогиба. Неразрезное пролетное строение  $2 \times 55$  м по расходу металла экономичнее на 5% по сравнению с двумя разрезными пролетными строениями той же высоты. Пролетное строение  $2 \times 66$  м с высотой ферм 6 м по сравнению с двумя разрезными пролетными строениями высотой 8,5 м тяжелее на 5%; из-за норм жесткости в ряде элементов расчетные сопротивления использованы не полностью. По проекту СНиП-43 введены кооррективы в нормы жесткости, которые позволили получить более экономичное пролетное строение  $2 \times 66$  м. Из рассмотрения всех вариантов пролетного строения следует также в выводе об эффективности

Таблица 7.3

№ варианта	Пролет и высота ферм пролетного строения с ездой поверху (см. рис. 7.16)	Прогиб фермы $\omega/l$	Расход металла на пролетное строение, т, при марках стали	
			15ХСНД	М16С+ +15ХСНД
1	$l=44$ м, $H=6$ м	1/1000	135,9	90,3+61,4
2	$l=55$ м, $H=6$ м	1/810	186,5	142,0+75,5
3	$l=55$ м, $H=6$ м (со скошенным концом)	1/810	180,0	—
4	$l=55$ м, $H=8,5$ м	1/950	183,1	—
5	$l=66$ м, $H=8,5$ м	1/790	235,3	186,6+93,1
6	$l=66$ м, $H=8,5$ м (со скошенным концом)	1/790	228,8	—
7	$l=2 \times 55$ м, $H=6$ м	1/870	357,0	—
8	$l=2 \times 66$ м, $H=6$ м	1/680	492,9	—

применения низколегированных сталей взамен малоуглеродистых, так как при этом можно получить снижение расходе металла на 14—22% и стоимости на 2—7%.

### 7.7. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ СКВОЗНЫХ ПРОЛЕТНЫХ СТРОЕНИЙ

Для характеристики особенностей работы новых пролетных строений приведем некоторые результаты расчетов неразрезного пролетного строения с пролетами  $2 \times 66$  м.

Рассмотрим наиболее характерные загрузки пролетного строения. При загрузке обоих пролетных строений равномерно распределенной вертикальной нагрузкой (рис. 7.18) одновременно изменяли конструкцию проезжей части: по варианту I приняли исходную ее конструкцию со всеми диафрагмами (по проекту); по варианту II — четыре диафрагмы около промежуточной опоры исключили; по варианту III конструкцию проезжей части приняли без диафрагм, т. е. включали продольные балки в совместную работу с помощью поперечных балок.

Анализ данных (см. рис. 7.18) показывает, что усилия в связях и нижних поясах значительно отличаются для всех трех вариантов конструкции проезжей части. Усилия в верхних поясах при включении проезжей части в совместную работу с фермами изменяются заметно. В наиболее загруженной панели 10—12 усилие снижается почти на 20% по сравнению с вариантом II при отсутствии диафрагм, но при наличии поперечных балок. Усилия в продольных балках появляются уже за счет работы одних поперечных балок в горизонтальной плоскости (вариант III). В середине пролета усилие в продольной балке равно 13,3 кН (сжатие), а над промежуточной опорой 4,0 кН (растяжение). Отсутствие диафрагм около промежуточной опоры (вариант II) заметно влияет на усилия в верхних поя-

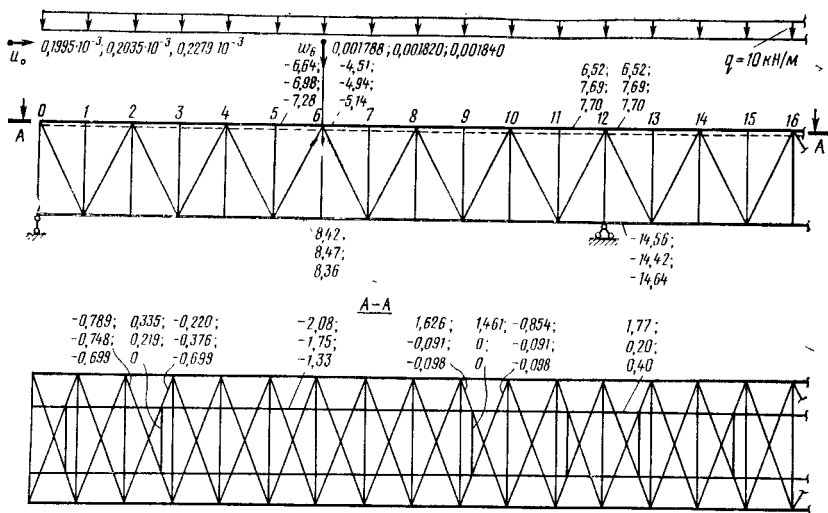


Рис. 7.18. Пролетное строение  $2 \times 66$  м, загруженное вертикальной нагрузкой  $q = 10 \text{ кН/м}$ . Цифровые данные прогибов  $w$  и перемещений  $u_0$  (в метрах), а также усилий в элементах (в килоньютонах) приведены для вариантов проезжей части соответственно I, II и III

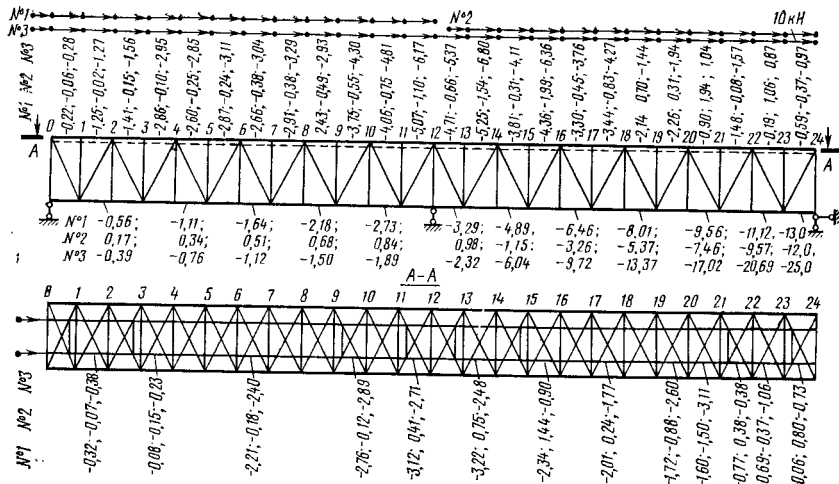


Рис. 7.19. Пролетное строение  $2 \times 66$  м, загруженное горизонтальной продольной нагрузкой  $10 \text{ кН/м}$ . Цифровые данные усилий в элементах приведены для трех загрузок соответственно левого, правого и обоих пролетов № 1, № 2 и № 3

Номер узла фермы	Вид усилия	Усилия в поперечной балке, кН, при загрузке фермы вертикальной нагрузкой		
		Диафрагмы по проекту	Без диафрагм над промежуточной опорой	Без диафрагм, но с поперечными балками
0	$N$	5,324 (6,569)	5,252 (6,409)	2,632 (3,027)
	$R_{\text{нг}}$	-0,2718 (-0,3429)	-0,2668 (-0,3321)	-0,687 (-0,9355)
	$R_{\text{вг}}$	-1,698 (-2,093)	-1,672 (-2,035)	-4,039 (-5,429)
1	$N$	-2,899 (-4,593)	-2,583 (-3,971)	4,809 (5,436)
	$R_{\text{нг}}$	-0,1355 (-0,1873)	-0,1286 (-0,1732)	-0,5312 (-0,7562)
	$R_{\text{вг}}$	-0,9726 (-1,299)	-0,9304 (-1,214)	-3,322 (-4,677)
2	$N$	6,328 (8,276)	6,137 (7,879)	6,294 (7,365)
	$R_{\text{нг}}$	-0,1472 (-0,2246)	-0,1334 (-0,1972)	-0,4497 (-0,6790)
	$R_{\text{вг}}$	-0,8822 (-1,344)	-0,8013 (-1,184)	-2,676 (-4,042)
9	$N$	-9,942 (-2,835)	0,542 (7,970)	0,6469 (8,220)
	$R_{\text{нг}}$	0,2524 (0,1993)	0,5399 (0,7296)	0,4999 (0,6385)
	$R_{\text{вг}}$	1,560 (1,269)	3,241 (4,386)	3,004 (3,847)
10	$N$	1,033 (6,316)	-3,876 (2,812)	-3,837 (2,936)
	$R_{\text{нг}}$	0,3316 (0,3686)	0,5491 (0,9261)	0,5253 (0,8545)
	$R_{\text{вг}}$	1,893 (2,126)	3,204 (5,459)	3,062 (5,033)
11	$N$	-11,030 (-10,014)	-8,582 (-2,444)	-8,589 (-2,412)
	$R_{\text{нг}}$	0,08325 (0,2088)	0,2117 (0,7843)	0,2000 (0,7244)
	$R_{\text{вг}}$	1,110 (1,347)	1,872 (4,776)	1,804 (4,417)

Примечания. 1. В скобках приведены усилия при загрузке фермы в одном пролете, без скобок — в двух пролетах.

2. Принятые обозначения:  $N$  — осевая сила в поперечной балке,  $R_{\text{нг}}$  — горизонтальная реакция (сила) на нижний пояс поперечной балки;  $R_{\text{вг}}$  — то же, на верхний пояс.

сах фермы на длине в половину пролета. При этом усилия в продольных балках изменяются существенно как над промежуточной опорой, так и в пролете: на опоре уменьшение с 17,7 кН до 2,0 кН, в пролете с -20,8 до -17,5 кН. Усилия в элементах диафрагм зависят как от места их положения, так и числа диафрагм.

Перемещения продольное  $u$  для узла 0 и прогиб  $w$  для узла 5 уменьшаются при постановке диафрагм соответственно на 14 и 3%. Для изолированной фермы без учета работы поперечных балок на изгиб в горизонтальной плоскости эти величины будут выше.

Работу элементов пролетного строения при загрузке горизонтальной продольной нагрузкой 10 кН для трех ее положений в пролетах можно видеть по данным рис. 7.19. Включение конструкции проезжей части в совместную работу с фермами качественно изменяет распределение усилий по сравнению с традиционными решениями передачи горизонтальных сил. Диафрагмы обеспечивают более равномерную передачу сил на элементы пролетного строения.

Оценим теперь работу поперечных балок.

При загрузке вертикальной нагрузкой двух пролетов пролетного строения (табл. 7.4) наиболее интенсивно в горизонтальной

Номер узла фермы	Вид усилия	Усилия в поперечной балке, кН, при загрузке продольной горизонтальной нагрузкой фермы		
		двух пролетов	левого пролета	правого пролета
0	$N$	-2,496	-2,663	0,1671
	$R_{НГ}$	0,2103	0,2198	-0,009496
	$R_{ВГ}$	1,126	1,178	-0,05284
1	$N$	8,474	8,693	-0,2190
	$R_{НГ}$	0,1841	0,1908	-0,006789
	$R_{ВГ}$	1,109	1,152	-0,04294
2	$N$	-1,586	-1,844	0,2583
	$R_{НГ}$	0,2411	0,2511	-0,01000
	$R_{ВГ}$	1,406	1,466	-0,0599
9	$N$	-2,819	-3,382	0,5629
	$R_{НГ}$	0,2367	0,2335	0,003229
	$R_{ВГ}$	1,427	1,402	0,02501
10	$N$	10,54	9,404	1,137
	$R_{НГ}$	0,2929	0,2653	0,02753
	$R_{ВГ}$	1,732	1,558	0,1741
11	$N$	-3,318	-1,949	-1,369
	$R_{НГ}$	0,2402	0,1879	0,05231
	$R_{ВГ}$	1,383	1,113	0,2696

Обозначения — см. примечание к табл. 7.4.

плоскости на изгиб работает поперечная балка в узле 10 (диафрагмы по проекту), а при отсутствии диафрагм — в узле 0; постановка диафрагм уменьшает усилия изгиба поперечной балки в 2—3 раза. Загружение одного пролета вертикальной нагрузкой дает аналогичные результаты, но абсолютные значения усилий больше (см. табл. 7.4). При загрузке продольной горизонтальной нагрузкой (табл. 7.5) схема диафрагм принята по проекту, но рассмотрены различные длины загрузки. Максимальные значения осевого и изгибающих в горизонтальной плоскости поперечную балку усилий, имеет место в узле 10 при загрузке двух пролетов.

Таким образом, пространственные расчеты позволяют выявить особенности работы элементов пролетных строений при включении конструкции проезжей части в совместную работу с главными фермами, что важно при проектировании данных конструкций.

В расчетах сложных сооружений иногда оказывается целесообразным подход к сквозным конструкциям, как к балкам со сплошной стенкой. Например, горизонтальные (ветровые) фермы в пролетных строениях для расчета удобно принять за балку, подчиняющуюся известным зависимостям сопротивления материалов. Но в отличие от обычных допущений о пренебрежении деформация-

ми сдвига в данном случае их необходимо учитывать. При этом дифференциальное уравнение изгиба имеет вид:

$$w''(x) = -M/(EJ) - q(x)/(Gh\delta), \quad (7.13)$$

где  $h, \delta$  — высота и толщина стенки балки.

Рассмотрим случай загрузки балки равномерно распределенной нагрузкой, для которой можно записать ее значение через изгибающий момент,

$$q = 2M/(lx - x^2).$$

Подставив это выражение в дифференциальное уравнение (7.13), получим

$$w''(x) = \frac{M}{E} \left( \frac{1}{J} + \frac{2E}{Gh\delta(lx - x^2)} \right).$$

Выражение в круглых скобках можно трактовать как обратный приведенный (условный) момент инерции балки, рассчитываемой с учетом сдвигов. Тогда уравнение изгиба будет

$$w''(x) = -\frac{M}{EJ_{\text{пр}}} \quad \text{при } J_{\text{пр}} = J \left[ 1 + \frac{2EJ}{Gh\delta(lx - x^2)} \right]^{-1}. \quad (7.14)$$

Поскольку приведенный момент инерции переменный по длине, то для практических расчетов можно взять какое-либо сечение, например, в середине пролета, и подставляя в эту формулу  $x = l/2$ , получим

$$J_{\text{пр}} = J \left[ 1 + \frac{8EJ}{Gh\delta l^2} \right]^{-1}. \quad (7.15)$$

Для перехода к сквозной конструкции необходимо под моментом инерции  $J$  понимать момент инерции, вычисляемый по площадям поясов, а толщину стенки

$$\delta = b_{\Phi} / \Delta_T,$$

где  $b_{\Phi}$  — расстояние в осях между поясами фермы в плоскости изгиба;  $\Delta_T$  — коэффициент, характеризующий тип решетки (заполнения) и определяемый по соответствующим формулам [42].

Принимая  $h \approx b_{\Phi}$ , получим в окончательном виде выражение для приведенного момента инерции

$$J_{\text{пр}} = J \left[ 1 + \frac{8EJ\Delta_T}{Gb_{\Phi}^2 l^2} \right]^{-1}. \quad (7.16)$$

Для оценки некоторых качеств пролетных строений с конструкцией проезжей части, включенной в совместную работу с главными фермами, во ВНИИ транспортного строительства были испытаны конструкции пролетных строений с ездой понизу, рассчитанные по изложенной автором методике. Это железнодорожные пролетные строения пролетами: 66 м моста через р. Трубеж на стадии монтажа и эксплуатации; 66 м — через р. Лесной Воропеж на стадии эксплуатации; 110 м — через р. Балык на стадии эксплуатации; 110 + 132 + 110 м через р. Лена на стадиях навес-

ного монтажа и эксплуатации. Испытаниями установлены:

1. Жесткость новых пролетных строений в вертикальной плоскости более высокая, чем при устройстве разрывов в продольных балках (старые конструкции). Конструктивные поправки для прогибов (отношение измеренной величины к расчетной) составляют около 0,9.

2. Усилия в элементах главных ферм в общем хорошо согласуются с расчетными данными. Выявлено существенное уменьшение усилий в нижних поясах за счет совместной работы их с продольными балками. Например, конструктивные поправки в предположении шарнирной изолированной фермы пролетом 110 м для нижних поясов в панелях: Н0-Н1 равны  $0,76 \div 0,79$ ; Н2-Н3 —  $0,65 \div 0,75$ ; Н4-Н5 —  $0,57 \div 0,64$ . С учетом совместной работы те же величины соответственно равны:  $0,84 \div 0,98$ ;  $0,90 \div 1,06$ ;  $0,95 \div 1,06$ . Отсюда ясно видно уменьшение усилий в поясах ферм за счет совместной работы с конструкцией проезжей части.

3. Поперечные балки работают в более благоприятных условиях по сравнению с пролетными строениями без включения конструкции проезжей части в совместную работу с главными фермами. Это объясняется тем, что в новых конструкциях продольное горизонтальное смещение узлов ферм по отношению к перемещениям узлов пересечения продольных и поперечных балок не столь велико и, следовательно, изгиб поперечной балки в горизонтальной плоскости небольшой. Такое обстоятельство важно для конструкций северного исполнения.

4. Продольные балки интенсивно включаются в работу на осевые силы как на стадии эксплуатации, так и при монтаже. При испытательных нагрузках зафиксировано участие мостового полотна на деревянных поперечинах в совместной работе с продольными балками. Например, наибольшие значения конструктивных поправок пролетного строения пролетом 110 м для панели 0-1 равны 0,79; 2-3 равны 0,65; 4-5 равны 0,76.

5. Элементы диафрагм (связи), играющие главную роль в передаче усилий и поясов на продольные балки, фактически нагружены меньше, чем по расчету, так как связи во всех панелях прикреплены высокопрочными болтами к нижним поясам продольных балок и образуют, таким образом, своего рода дополнительные диафрагмы, не учитываемые в расчетной схеме. Роль распорок здесь играют поперечные связи между продольными балками. Конструктивные поправки для диагоналей диафрагм и длинных распорок равны в среднем 0,6, а для коротких — 0,3—0,4. Меньшие значения поправок наблюдались в связи с тем, что вблизи коротких распорок диафрагм расположены распорки поперечных связей продольных балок, которые воспринимают на себя часть усилия.

Отмечено: 1) фибровые напряжения в связях и диафрагмах превосходят осевые более чем в 2 раза; 2) четкое выявление закономерностей в перераспределении усилий при включении конструкции проезжей части в совместную работу с фермами.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А р г и р и с Д ж. Современные достижения в методах расчета конструкций с применением матриц: Пер. с англ. — М.: Стройиздат, 1968.—240 с.
2. Б а л д и н В. А. Расчет стальных конструкций по расчетным предельным состояниям.— М.: Госстройиздат, 1956.— 42 с.
3. Б е з у х о в Н. И., Л у ж и н О. В. Приложение методов теории упругости и пластичности к решению инженерных задач.— М.: Высшая школа, 1974.— 200 с.
4. Б е л е н я Е. И. Предварительно напряженные несущие металлические конструкции.— М.: Стройиздат, 1975.—415 с.
5. Б е л ь с к и й Г. Е. О предельных состояниях элементов металлических конструкций при сжатии (растяжении) с изгибом.— Строительная механика и расчет сооружений, 1973, № 2. с. 18—20.
6. Б и р г е р И. А. Круглые пластинки и оболочки вращения.— М. Оборонгиз, 1961.— 367 с.
7. Б л е й х Ф. Устойчивость металлических конструкций: Пер. с англ.— М.: Физматгиз, 1959.— 544 с.
8. Б о л ь ш а к о в К. П., П о т а п к и н А. А. Совершенствование норм проектирования стальных конструкций мостов и методов их расчета на прочность и устойчивость.— В кн.: Конструкции, расчет и технология изготовления стальных мостов.— М.: Транспорт, 1974, с. 52—60 (Тр. ВНИИ трансп. стр.-ва, вып. 90).
9. Б о л ь ш а к о в К. П., П о т а п к и н А. А. Применение вайтубалочных систем в мостах больших пролетов.— В кн.: Исследования современных конструкций стальных мостов.— М.: Транспорт, 1975, с. 4—29 (Тр. ВНИИ трансп. стр.-ва, вып. 94).
10. Б о л ь ш а к о в К. П., П о т а п к и н А. А. Особенности конструкции и расчета сквозных балочно-неразрезных железнодорожных пролетных строений с конструкцией проезжей части, включенной в совместную работу с главными фермами.— В кн.: Исследования стальных и сталежелезобетонных балочных мостов.— М.: Транспорт, 1976, с. 24—40 (Тр. ВНИИ трансп. стр.-ва, вып. 99).
11. Б р о у д е Б. М. Предельные состояния стальных балок.— М., Л.: Стройиздат, 1953.— 216 с.
12. В л а с о в В. З. Тонкостенные упругие стержни.— М.: Физматгиз, 1959,—568 с.
13. В о л к о в С. Д. Статистическая теория прочности. — М.: Машгиз, 1960.— 176 с.
14. В о л ь м и р А. С. Устойчивость деформируемых систем. М: Наука, 1967. — 984 с.
15. В о р о в и ч И. И., К р а с о в с к и й Ю. П. О методе упругих решений. — В кн.: ДАН СССР, 1959, т. 126, № 4, с. 701—705.
16. Г е м м е р л и н г А. В. Расчет стержневых систем.— М.: Стройиздат, 1974.—207 с.
17. И л ь ю ш и н А. А. Пластичность.— М.: Гостехиздат, 1948,— 376 с.
18. И л ь ю ш и н А. А. Пластичность. Основы общей математической теории.— М.: Изд-во АН СССР, 1963.— 271 с.
19. К а ч а н о в Л. М. Основы теории пластичности.— М.: ГИТТЛ, 1956.— 324 с.
20. К а ч а н о в Л. М. Основы механики разрушения.— М.: Наука, 1974.— 311 с.
21. К о й т е р В. Т. Общие теоремы теории упругопластических сред: Пер. с англ.— М.: Изд-во иностр. лит., 1961.— 79 с.

22. Королев В. И. Упруго-пластические деформации оболочек.— М.: Машиностроение, 1971.— 303 с.
23. Короткий Я. И., Постнов В. А., Сиверс Н. Л. Строительная механика корабля и теория упругости: Т.1. — Л.: Судостроение, 1968.— 424 с.
24. Лежницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М.: Изд. техн. теоретич. лит., 1957.— 563 с.
25. Лукаш И. А. Основы нелинейной строительной механики. — М.: Стройиздат, 1978.—204 с.
26. Ляли Н. Б., Евграфов Г. К. Расчеты мостов по предельным состояниям.— М.: Трансжелдориздат, 1962. — 336 с.
27. Макклиток Ф., Аргон А. Деформация и разрушение материалов: Пер. с англ.— М.: Мир, 1970,—443 с.
28. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. — М.: Машиностроение, 1968.— 399 с.
29. Методы расчета стержневых систем, пластин и оболочек с использованием ЭВМ.— ч. 1 и II/А.В. Александров, Б. Я. Лащеников, Н. Н. Шапошников и др.— М.: Стройиздат, 1976.— 453 с.
30. Москвитин В. В. Пластичность при переменных нагружениях. — М.: Изд. МГУ, 1965.— 262 с.
31. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел.— М.: ИЛ, 1954.
32. Нил Б. Г. Расчет конструкций с учетом пластических свойств материалов: Пер. с англ.— М.: Госстройиздат, 1961.— 315 с.
33. Николаев Г. А., Куркин С. А., Винокуров В. А. Расчет, проектирование и изготовление сварных конструкций.— М.: Высшая школа, 1971.— 760 с.
34. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. — М. Л.: Гостехиздат, 1948.— 192 с.
35. Новожилова Н. И., Малышев Г. И., Хотмиров В. Г. О надежности стальных для железнодорожных мостов северного исполнения.— Проблемы прочности, 1981, № 6, с. 89—93.
36. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред: Пер. с англ. — М.: Мир, 1976.— 464 с.
37. Окерблом Н. О. Расчет деформаций металлоконструкций при сварке.— М.: Машгиз, 1955.— 212 с.
38. Партон Б. З., Морозов Е. М. Механика упруго-пластического разрушения.— М.: Наука, 1974.— 416 с.
39. Петропавловский А. А. О пространственных расчетах мостов с коробчатыми балками неразрезных и комбинированных систем. — В кн.: Исследование мостовых конструкций: М., 1971, с. 3—19 (Тр. МИИТ, вып. 375).
40. Петропавловский А. А. Матричные алгоритмы смешанного метода в нелинейных задачах теории висячих и арочных мостов современных систем. — В кн.: Исследование и расчет современных мостовых конструкций: М., 1977, с. 3—58 (Тр. МИИТ, вып. 561).
41. Платонов А. С., Потапкин А. А. Методические рекомендации по проектированию стальной ортотропной плиты проезжей части автодорожных мостов.— М., 1972.— 48 с. (Рекомендовано ВНИИ транс. стр.-ва).
42. Пространственные расчеты мостов./Б. Е. Улицкий, А. А. Потапкин, В. И. Руденко и др.— М.: Транспорт, 1967.— 403 с.
43. Протасов К. Г. Расчет статически неопределимых мостовых ферм с учетом пластических деформаций.— М.: Трансжелдориздат, 1947 — 131 с.
44. Потапкин А. А. Пространственный расчет стальных мостов в упругопластической стадии с использованием ЭЦВМ.— В кн.: Краткие тезисы докладов к научно-технической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения академика Г. П. Передерия.— Л., 1971, с. 19—22.
45. Потапкин А. А. Расчет стальных мостов на прочность с учетом развития пластических деформаций.— В кн.: Аннотации докладов XXX научно-исследовательской конференции МАДИ.— М., 1971, с. 15.

46. П о т а п к и н А. А. К расчету стальных мостов на прочность с учетом развития пластических деформаций.— В кн.: Современные проблемы отечественного мостостроения.— Л., 1972, с. 84—91 (Тр. ЛИИЖТ, вып. 343).

47. П о т а п к и н А. А. Теория и расчет стальных и сталежелезобетонных мостов на прочность с учетом нелинейных и пластических деформаций.— М.: Транспорт, 1972.—192 с.

48. П о т а п к и н А. А. Совершенствование методов расчета стальных мостов на прочность. В кн.: Исследования стальных и сталежелезобетонных мостов. М.: Транспорт, 1973, с. 17—29 (Тр. ВНИИ трансп. стр.-ва, вып. 88).

49. П о т а п к и н А. А. Расчеты стальных мостов на прочность в упругопластической стадии.— В кн.: Конструкции, расчет и технология изготовления стальных мостов.— М.: Транспорт, 1974, с. 60—78 (Тр. ВНИИ трансп. стр.-ва, вып. 90).

50. П о т а п к и н А. А. Вопросы расчета стальных конструкций мостов в упругопластической стадии работы. В кн.: Исследования современных конструкций стальных мостов.— М.: Транспорт, 1975, с. 122—128 (Тр. ВНИИ трансп. стр.-ва, вып. 94).

51. П о т а п к и н А. А. Об устойчивости пластинчатых элементов стальных мостов в упругопластической стадии.— В кн. Исследования стальных и сталежелезобетонных балочных мостов.— М.: Транспорт, 1976, с. 96—100 (Тр. ВНИИ трансп. стр.-ва, вып. 99).

52. П о т а п к и н А. А. Причины аварий стальных мостов. — Транспортное строительство, 1978, № 8, с. 44—45.

53. Р е з н и к о в Р. А. Решение задач строительной механики на ЭЦМ. — М.: Стройиздат, 1971.— 311 с.

54. Р ж а н и ц ы н А. Р. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов.— М.: Стройиздат, 1954. 287 с.

55. С к р я б и н а Т. А. Расчет неразрезных ортотропных плит на неподатливых и упругих опорах. — В сб.: Тр. МИИТ.— М.: Транспорт, 1966, с. 28—35 (вып. 227).

56. С м и р н о в А. Ф. Устойчивость и колебания сооружений.— М.: Трансжелдориздат, 1958.— 308 с.

57. С м и р н о в В. А. Висячие мосты больших пролетов. — М.: Высшая школа, 1970.— 408 с.

58. С н и т к о Н. К. Устойчивость стержневых систем в упругопластической области.— Л.: Стройиздат, 1968.— 248 с.

59. С о л о м е и к о Н. С., А б р а м я н К. Г., С о р о к и н В. В. Прочность и устойчивость пластин и оболочек судового корпуса.— Л.: Судостроение, 1967.— 488 с.

60. Справочник по теории упругости /Под ред. П. М. Варвака и А.Ф. Рябова.— Киев: Будивельник, 1971.—419 с.

61. С т р е л е ц к и й Н. Н. К вопросу развития методики расчета по предельным состояниям.— В кн.: Развитие методики расчета по предельным состояниям. Сборник статей.— М.: Стройиздат, 1971, с. 5—37.

62. С т р е л е ц к и й Н. Н. Первоочередные вопросы развития методики предельных состояний.— В кн.: Развитие методики расчета по предельным состояниям. Сборник статей. — М.: Стройиздат, 1971, с. 87—95.

63. С т р е л е ц к и й Н. Н. Исследования совместной работы проезжей части и главных ферм современных конструкций металлических мостов.— Автореф. дис. д-ра техн. наук.— М.: 1970.— 56 с.

64. С т р е л е ц к и й Н. Н. Совместная работа и предельные состояния элементов металлических мостов.— М.: 1957, 55 с. (Сообщение ВНИИ трансп. стр.-ва, вып. 89).

65. С т р е л е ц к и й Н. Н. Сталежелезобетонные пролетные строения мостов.— М.: Транспорт, 1981.— 360 с.

66. Строительные нормы и правила. Часть II, раздел А. Глава 10 «Строительные конструкции и основания. Основные положения проектирования»-СНиП II-A.10-71.— М.: Стройиздат, 1972.— 8 с.

67. Технические условия проектирования железнодорожных, автодорожных и городских мостов и труб: СН 200—62.—М.: Трансжелдориздат, 1962.—328 с.
68. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем: Пер. с англ.—М. Л.: Гостехиздат, 1946.— 532 с.
69. Тимошенко С. П. Механика материалов: Пер с англ. — М.: Мир, 1976. — 669 с.
70. Филин А. П. Определение лишних неизвестных в физически нелинейных статических неопределимых стержневых системах.— Доклады АН СССР, 1953, т. 89, № 4, с. 85—87.
71. Ходж Ф. Г. Расчет конструкций с учетом пластических деформаций: Пер. с англ.— М.: Машгиз, 1963.— 308 с.
72. Шелестенко Л. П., Хромец Ю. Н. Исследование предельного состояния по прочности изгибаемых элементов пролетных строений мостов — В кн.: Научное сообщение ВНИИ трансп. стр.-ва.— М. 1960, с. 117—143.
73. Шнейдерович Р. М., Прочность при статическом и повторно статическом нагружениях. — М. Машиностроение, 1968.— 342 с.
74. Bijlaard P. P. Buckling of Plates under Non-Homogeneous Stress.— J. eng. Mech., Div. Proc. Amer. Soc. Civil Eng. Vol. 83, No. EM 3, July, 1957, p. 1—31.
75. Bolshakov K. P., Potapkin A. A. Application of High Strength Steels of Class S60 to Long Span Highway and Railway Bridges. Tenth Congress IABSE, Tokyo, 1976, Preliminary Report, p. 457—464.
76. Faltnus F., Skaloud M. Havárie ocelových mostu a poučení z nich plnouchi. Inženýrské stavby. No 2, 1973, S. 49—63.
77. Fisher J. W. and Viest I. M., Ultimate Strength Concepts for Design of Steel Bridges.— Reprint — Committee Proceedings AASHTO Portland, Oregon — 1963, p. 127—141.
78. Frey F. Effect of the Cold Bending of Double — Tee Rolled Steel Sections on their Bearing Strength.— IABSE Publication. 29—11, 1969, p. 101—124.
79. Fukumoto Y., Usami T., Jamaguchi K. Inelastic Buckling Strength of Stiffened Plates in Compression.— IABSE Proceedings p—8/77.—15 p.
80. Galambos T. V., Lay M. G. Studies of the Ductility of Steel Structures.— Journal of the Structural Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol. 91, ST4, August, 1965, p. 125—151.
81. Gelissen E., Lerou Y. Le viaduc de Beer.— Annales des Travaux Publics de Belgique, NO3—1974, p. 151—205.
82. Maquoi R., Massonet Ch. Théorie non linéaire de la résistance postcritique des grandes poutres en caisson raidies.— Mémoires AIPC, 31—11, 1971, 91—140.
83. Moffatt K. R. Dowling P. I. Shear Lag in Steel Box Girder Bridges.— The Structural Engineer. October 1975, No. 10. Vol. 53, p. 434—448.
84. Potapkin A. A. Überbauten von Eisenbahn fahwerkbrücken mit einer mit Hauptträgern mitwirkenden Fahrbahn.— Symposium IABSE «Steel and composite structures for user needs». Dresden, 1975, p. 34—48.
85. Potapkin A. A. Steel Railway Bridge on the Baikal—Amour Railway Line.— IABSE Periodica C-4/78 «Structures in the USSR», p. 17.
86. Potapkin A. A. Up-to date methods in stability analysis of steel bridge structures. Theoretical and practical aspects.— Regional colloquium on Stability of steel structures. Hungary, Budapest — Balatonfured, 1977, Final Report, p. 25—56.
87. Wasutyński Z. O kształtowaniu wytrzymałościowym. — Warszawa 1939.— 107s.
88. Pechar J. Navrhování komorových ocelových mostu.— Praha, 1979.— 124 s.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
<b>1. Теоретические и физические особенности методов проектирования мостов</b>	<b>5</b>
1.1. Пути совершенствования методов проектирования	5
1.2. Энергетические методы расчета конструкций	8
1.3. Механика разрушения стальных конструкций	18
1.4. Физические особенности учета пластических деформаций	31
<b>2. Особенности пространственных расчетов конструкций</b>	<b>41</b>
2.1. Конструктивные формы мостов и роль пространственных расчетов при проектировании	41
2.2. Общие положения по схемам и методам расчета	46
2.3. Учет пространственной работы сооружений	50
2.4. Особенности применения методов расчета пространственных систем к стальным мостам	54
<b>3. Комбинированный метод прикладной деформационной теории пластичности</b>	<b>59</b>
3.1. Особенности теории пластичности и метода упругих решений	59
3.2. Формы зависимости между напряжениями и деформациями. Комбинированный метод деформационной теории пластичности	63
3.3. Оценка сходности комбинированного метода	70
<b>4. Деформационные критерии эксплуатационной способности пролетных строений</b>	<b>75</b>
4.1. Виды деформационных критериев	75
4.2. Использование критерия ограниченной пластической деформации для расчета элементов	78
4.3. Оценка эксплуатационных качеств пролетных строений	82
4.4. Энергетическое обоснование принципа совмещения функций элементами сооружений	85
<b>5. Особенности расчетов пролетных строений с учетом ограниченных пластических деформаций</b>	<b>89</b>
5.1. Расчет элементов при одновременном действии нормальных и касательных напряжений	89
5.2. Расчет элементов при сложном напряженном состоянии	94
5.3. Расчет элементов при неравномерном по ширине распределении нормальных напряжений	103
5.4. Расчет элементов обратным методом	107
5.5. Нагружение тонкостенного стержня нормальными напряжениями (комбинированный метод)	110
5.6. Вычисление перемещений и расчет балочных элементов	113
5.7. Повышение эффективности использования несущей способности стали при учете пластических деформаций	120
<b>6. Устойчивость элементов в упругопластической стадии</b>	<b>121</b>
6.1. Общие положения и критерии устойчивости	121
6.2. Особенности расчета стержней на устойчивость	123
6.3. Изгибно-крутильная устойчивость первого рода для балок	126
6.4. Изгибно-крутильная устойчивость второго рода для балок и стержней	129
6.5. Нормативный метод расчета изгибно-крутильной устойчивости	134
6.6. Пластинчатые элементы	139
6.7. Пластинки с начальными искривлениями	148
6.8. Конструктивно-анизотропные пластины	152
6.9. Стенки сплошных балок	157
<b>7. Особенности проектирования пролетных строений мостов</b>	<b>162</b>
7.1. Специальные принципы проектирования	162
7.2. Пролетные строения со сплошными балками	163
7.3. Сжатые пояса коробчатых балок	168
7.4. Ортотропные плиты проезжей части	172
7.5. Влияние осадки опор и остаточных напряжений на работу неразрезных балок	179
7.6. Пролетные строения со сквозными фермами	183
7.7. Результаты исследований сквозных пролетных строений	191
Список литературы	197